# Feuille d'exercices n°19
# Probabilités

## Formule des probabilités totales

**Exercice 1.** On dispose de trois pièces de monnaie : la première donne pile avec la probabilité $p \in ]0, 1[$, la seconde donne toujours pile et la troisième est équilibrée. On prend une des trois pièces au hasard et on effectue une succession infinie de lancers indépendants avec cette même pièce.

1. Calculer la probabilité d'obtenir pile au premier lancer.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Déterminer la probabilité $p_n$ d'obtenir uniquement des piles au cours des $n$ premiers lancers.
3. Étudier la convergence de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$. Interpréter le résultat.

**Exercice 2.** On dispose d'une urne $U_1$ contenant deux boules blanches et trois boules noires et d'une urne $U_2$ contenant quatre boules blanches et trois boules noires. On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes : on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient. Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne $U_1$, sinon il se fait dans l'urne $U_2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $B_n$ l'événement « la boule tirée au $n$-ième tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer $p_1$ et montrer que l'on a la relation
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}.$$
2. Objectif : Déterminer l'expression et étudier la convergence de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ .
3. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = -\frac{6}{35}\alpha + \frac{4}{7}$.
4. On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_n = p_n - \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que $(u_n)$ est une suite géométrique.
5. En déduire l'expression de $(u_n)$ , puis celle de $(p_n)$.
6. Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ . Interpréter le résultat.

**Exercice 3.** On considère trois points distincts du plan nommés A, B et C. Un pion se trouve initialement en A et se déplace ensuite à chaque seconde avec les règles suivantes : le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $p_n$ la probabilité de se trouver en A à la $n$-ième seconde.

1. Déterminer une relation de récurrence entre $p_{n+1}$ et $p_n$.
2. En déduire un expression de $p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
3. En déduire la nature de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ . Interpréter le résultat.

**Exercice 4.** Un professeur oublie fréquemment ses clés. On suppose que le premier jour, il les oublie avec une probabilité $p_1 \in [0, 1]$. Ensuite, si un jour donné il les oublie, le jour suivant il les oublie avec une probabilité $1/10$. A contrario, s'il ne les oublie pas un jour donné, le lendemain il les oublie avec la probabilité $4/10$. On note $p_n$ la probabilité que le professeur oublie ses clés le $n$-ième jour.

1. Déterminer une relation de récurrence entre $p_{n+1}$ et $p_n$.
2. En déduire une expression de $p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
3. Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$. Interpréter le résultat.

## Formule de Bayes

**Exercice 5.** On étudie une forêt se composant de trois types d'arbres : 30% sont des chênes, 50% des peupliers, et 20% des hêtres. Une maladie touche 10% des chênes, 4% des peupliers, et 25% des hêtres. Sachant qu'un arbre est malade, quelle est la probabilité que ce soit un chêne ? un peuplier ? un hêtre ?

**Exercice 6.** Dans une entreprise, 1% des articles produits sont défectueux. Un contrôle qualité permet de refuser 95% des articles défectueux mais aussi de refuser 2% des articles acceptables. Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle ?

Quelle est la probabilité qu'un article accepté soit en réalité défectueux ?