Feuille d'exercices n°3
Fonctions usuelles

1 Fonctions logarithmes, exponentielles et puissances

Exercice 1. Simplifier les expressions suivantes :

1. $\exp(3)\exp(5)$
2. $\exp(-2)\exp(4)$
3. $\dfrac{1}{\exp(-5)}$
4. $(\exp(5))^3$

Exercice 2. Simplifier les expressions suivantes :

1. e^3e^4
2. e^4e^{-4}
3. $\dfrac{e^5e^{-3}}{e^{-2}}$
4. e^5e
5. $\left(e^4\right)^3e^4$
6. $\dfrac{e^6-e^3}{ee^2}$
7. $ee^5+5(e^2)^3$
8. $\left(e^3\right)^{-2}e^5$
9. $\dfrac{e-\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}$

Exercice 3. Simplifier les expressions suivantes :

1. e^xe^{-x}
2. e^xe^{-x+1}
3. $e\times e^{-x}$
4. $\dfrac{e^{2x}}{e^{2-x}}$
5. $\left(e^{-x}\right)^2$
6. $e^x\left(e^x+e^{-x}\right)$
7. $(e^x)^5\left(e^{-2x}\right)^2$
8. $\dfrac{(e^x)^3}{e^{2x}}$
9. $e^{-3x+1}(e^x)^3$
10. $\sqrt{e^{-2x}}$
11. $(xe^x)^{-2}$
12. $\dfrac{e^{-4x}e}{(e^{-x})^2}$

Exercice 4. Simplifier les expressions suivantes :

1. $\left(e^x+e^{-x}\right)^2-\left(e^x-e^{-x}\right)^2$
2. $\left(e^x-e^{-x}\right)^2-e^{-x}\left(e^{3x}-e^{-x}\right)$
3. $\left(e^x-e^{-x}\right)\left(e^{2x}+e^x+1\right)$
4. $\left(e^{3x}\right)^2+\left(e^{-3x}\right)^2-\left(e^{3x}-e^{-3x}\right)^2$
5. $\left(e^{3x}\right)^2-e^{2x}\left(e^{2x}+e^{-2}\right)^2$

Exercice 5. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $\exp(x)=e$
2. $\exp(-x)=1$
3. $\exp(2x-1)=e$
4. $e^{x^2+x}=1$
5. $e^x-e^{-x}=0$
6. $e^{x^2+5}=\left(e^{x+2}\right)^2$
7. $e^x+e^{-x}=0$
8. $e^{3x+1}=e^{-2x+3}$
9. $e^{2x}-1=0$

Exercice 6. Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $\exp(x)<e$
2. $\exp(-x)\geqslant 1$
3. $e^{2x-1}>e^x$
4. $e^x+e^{-x}<2$
5. $e^x<1$
6. $e^{-x}>0$
7. $e^{-x}>1$
8. $e^x-e^{-x}>0$
9. $xe^{-x}-3e^{-x}<0$

Exercice 7. Dans cet exercice, on cherche a résoudre une équation non simple avec des exponentielles.

1. Déterminer les racines du polynôme $P(X)=X^2+4X-5$.
2. En déduire les solutions de l'équation $e^{2x}+4e^x=5$.
3. Résoudre les équations suivantes :
   (a) $e^{2x}+e^x-2=0$
   (b) $e^{2x+1}+e^{x+1}-2e=0$
   (c) $e^x-2e^{-x}+1=0$

Exercice 8. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{e^x+3}{e^x-1}>0$
2. $-e^{2x}-e^x+2>0$
3. $e^{2x}+2e^x-3\geqslant 0$

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{R}$.

1. $e^{x^2+2} = \dfrac{e^{2x}}{e}$
2. $2e^{2x} + 5e^{x} + 3 = 0$
3. $e^{x} + e^{-x} > \sqrt{e} + \dfrac{1}{\sqrt{e}}$
4. $e^{x^2} + 1 \leqslant 2$

Exercice 10. Dans chacun des cas, pour quelles valeurs de x, l'expression donnée a-t-elle un sens ?

1. $\ln(x)$
2. $\ln(3-x)$
3. $\ln(x+2)$
4. $\dfrac{1}{\ln(x^2)}$

Exercice 11. Simplifier.

1. $e^{\ln 3}$
2. $e^{-\ln 5}$
3. $e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$
4. $\ln(e^5)$
5. $\ln 1 + \ln e$
6. $\ln(e^{-2})$

Exercice 12. Exprimer chacun des nombres suivants sous la forme $\ln c$ où c est un réel strictement positif.

1. $C = \ln 7 + \ln 8$
2. $H = \ln 20 - \ln 4$
3. $A = -\ln 4 + \ln 28$
4. $T = -2\ln 4$

Exercice 13. Résoudre les équations suivantes.

1. $e^{x} = 2$
2. $e^{x} = -5$
3. $e^{x} = \dfrac{1}{4}$
4. $\ln x = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$
5. $\ln(x) = \dfrac{\ln 5}{2}$
6. $\ln(x) = -\ln 9$
7. $(\ln(x) - 2)(1 + \ln(x)) = 0$
8. $(e^{x} - 3)(e^{x} + 5) = 0$

Exercice 14. Résoudre les inéquations suivantes.

1. $\ln(x) > 1$
2. $\ln(x) > -2$
3. $\ln(x) < \dfrac{1}{2}$
4. $\ln(x) < 3$

Exercice 15. Calculer les nombres réels suivants.

1. $\ln(0,5) + \ln 2$
2. $3\ln 2 - \ln 4$
3. $(\ln(e^3))^2$
4. $e^{\ln 2 + \ln 3}$

Exercice 16. Exprimer les nombres suivants sous forme d'un entier ou d'un inverse entier.

1. $T = e^{2\ln 3}$
2. $R = e^{4\ln 2}$
3. $U = e^{-\ln 4}$
4. $C = e^{-5\ln 2}$

Exercice 17. Simplifier au maximum les expressions suivantes :

1. $M = e^{\ln 6 - 2\ln 3}$
2. $A = e^{3\ln 2 - \ln 4 + 1}$
3. $L = \dfrac{e^{\ln 5 - 1}}{e^{2 + \ln 5}}$
4. $T = \dfrac{e^{2\ln 3 - \ln 2}}{e^{-3\ln 2}}$

Exercice 18. Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 2$.

1. $\ln 8$
2. $\ln(\sqrt{2})$
3. $\ln\left(\dfrac{1}{4}\right)$
4. $3\ln 2 - \ln 16$

Exercice 19. Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 3$ et $\ln 7$.

1. $\ln\left(\dfrac{81}{7}\right)$
2. $\ln 441$
3. $\ln\left(\dfrac{49}{27}\right)$
4. $\ln\sqrt{21}$

Exercice 20. Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln x = 2$
2. $\ln x = -1$
3. $3\ln x - 9 = 0$
4. $\ln(x+5) = \ln 3$
5. $\ln(x^2) = \ln 9$
6. $\ln(x^2 + x) = \ln 6$

Exercice 21. Résoudre les équations suivantes :

1. $2 + 3\ln x = 14$
2. $\ln(x^2) = \ln 9$
3. $e^{2-3x} = 5$
4. $2e^{2x} - 10 = 0$
5. $\ln(2-x) + 1 = 0$
6. $\ln(3x) - \ln(1-x) = \ln 2.$

Exercice 22.

1. Résoudre l'équation $X^2 - 2X - 15 = 0$.
2. En déduire les solutions des équations suivantes :
   (a) $e^{2x} - 2e^{x} - 15 = 0$;
   (b) $(\ln x)^2 - 2\ln x - 15 = 0.$

Exercice 23. Résoudre les équations suivantes :

1. $e^{2x} - 4e^{x} + 3 = 0,$
2. $2(\ln x)^2 + 5\ln x - 3 = 0.$

Exercice 24. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\ln(2-3x) \geqslant 0$
2. $\ln(1-x) < 1$
3. $\ln\left(\dfrac{3}{x}\right) > \ln 3$
4. $2\ln(x) \geqslant \ln(2-x)$
5. $\ln(x) + \ln(2x+5) \leqslant \ln 3$
6. $\ln(4x) - \ln 2 < 2\ln 4.$

Exercice 25. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $2e^x - 3 > 9$
2. $4e^x - 1 \geqslant e^x + 5$
3. $e^{2x} - 5e^x < 0$
4. $\ln(-2x+1) \leqslant 0$
5. $\ln\left(\dfrac{3x-1}{x+2}\right) \geqslant 0$
6. $\ln(2x-1) + 1 > 0$

Exercice 26. 1. Simplifier les écritures suivantes :

(1) $e^{\ln 3}$ (2) $\dfrac{e^{3+\ln 8}}{e^{2+\ln 4}}$

(3) $\ln 3 + \ln \frac{1}{3}$ (4) $\frac{1}{2}\ln\sqrt{2}$

(5) $e^{\ln(x-1)+\ln x}$ (6) $\ln(e^{\frac{1}{x}}) + e^{-\ln x}$

(7) $2\sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt{125}$ (8) $2\sqrt{32} - 3\sqrt{50} + 6\sqrt{8}$

(9) $\left(2\sqrt{2} - \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)$ (10) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

2. Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$:

(1) $\ln 50$

(2) $\ln \frac{16}{25}$

(3) $\ln 250$

3. Démontrer que : $\ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3}) = 0$.

Exercice 27. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes après avoir déterminé leur domaine de validité :

(1) $\ln(2-2x) = 1$ (2) $\ln(x^2-8) = 0$

(3) $e^{x+2} = 3$ (4) $(e^x+1)(e^x-4) = 0$

(5) $\ln(3x-4) = \ln(x^2-4)$ (6) $\ln(2x-1) > -1$

(7) $e^{\frac{x+1}{x}} > 3$ (8) $\ln(x-2) \leqslant \ln(2x-1)$

(9) $\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \geqslant \ln(x)$ (10) $e^{2x} < 2e^x$

(11) $e^{4x} - 3e^{2x} - 4 = 0$ (12) $\ln(5-x) - \ln 3 + \ln(x-1) \geqslant 0$

Exercice 28. Soit $x \in \mathbb{R}^{+\star}$. On pose $a = \exp(x^2)$ et $b = \frac{1}{x}\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)$. Simplifier l'expression a^b.

Exercice 29. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2.$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \leqslant 0$.
2. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation : $2\ln x + \ln(2x+5) \leqslant \ln(2-x)$.

2 Fonctions trigonométriques

Exercice 30. On donne

$$\cos\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.$$

1. Calculer $\pi - \dfrac{\pi}{5}$, $\pi + \dfrac{\pi}{5}$, $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{5}$ et $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{5}$
2. En déduire les valeurs exactes de :

$$\cos\frac{4\pi}{5},\ \sin\frac{4\pi}{5},\ \cos\frac{6\pi}{5},\ \sin\frac{6\pi}{5},\ \cos\frac{3\pi}{10},\ \sin\frac{3\pi}{10},\ \cos\frac{7\pi}{10} \text{ et } \sin\frac{7\pi}{10}.$$

Exercice 31. On donne

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

En déduire les valeurs exactes de : $\sin\dfrac{11\pi}{12}$, $\cos\dfrac{13\pi}{12}$, $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

Exercice 32. On donne

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad \text{et} \quad \sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

En déduire les valeurs exactes de :

$$\sin\frac{3\pi}{5},\ \cos\frac{3\pi}{5},\ \sin\frac{9\pi}{8},\ \cos\frac{9\pi}{8},\ \sin\frac{3\pi}{8},\ \cos\frac{3\pi}{8},\ \sin\frac{5\pi}{8} \text{ et } \cos\frac{5\pi}{8}.$$

Exercice 33. Exprimer les nombres suivants en fonction de $\cos x$ ou de $\sin x$:

1. $\sin(3\pi+x)$.
2. $\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)$.
3. $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.
4. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$.
5. $\sin(\pi-x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.
6. $3\sin(\pi+x)+4\sin(x-\pi)$.

Exercice 34.

1. Étant donné que $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, calculer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.
2. Déterminer les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

Exercice 35. Démontrer que pour tous réels x et y, on a :

1. $\sin(x+y)\cos(x-y)=\sin x\cos x+\cos y\sin y$.
2. $1-\sin 2x=(\cos x-\sin x)^2$.
3. $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}(\cos x-\sin x)$.

Exercice 36.

1. Simplifier l'expression suivante :

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

2. Établir l'égalité suivante : $\frac{\sin 5x}{\sin 2x}+\frac{\sin 2x}{\sin x}=\frac{(\sin 3x)^2}{\sin 2x\sin x}$.
3. Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ l'équation suivante :

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x)+\frac{1}{2}\sin(2x)=\cos\frac{\pi}{7}.$$

Exercice 37. Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$, puis dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $\cos(x)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
2. $\sin(x)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.
3. $\cos(2x)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
4. $\cos(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.
5. $2\cos(2x)=1$.
6. $\sin(3x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
7. $\cos(2x)=\cos(x)$.
8. $\sin(3x)=\cos(x)$.

Exercice 38. Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$, puis dans $\mathbb{R}$, les équations et inéquations suivantes :

1. $\cos(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. $\sin(x)=-\frac{1}{2}$.
3. $\sin(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
4. $\frac{\sin(x)}{\cos x}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.
5. $\cos(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
6. $\cos(x)=-\sin(x)$.
7. $\sin(x)\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$.
8. $\cos(x)\geqslant-\frac{1}{2}$.
9. $\cos(x)<0$.
10. $\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.
11. $\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
12. $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos x$.
13. $2\cos^2(x)-3\cos(x)+1\geqslant 0$.
14. $2\sin^2(x)+5\sin(x)+2<0$.

Définition. Un angle orienté possède une infinité de mesures. Si x est l'une d'entre elles, toute autre mesure peut s'écrire $x+2k\pi$, où $k\in\mathbb{Z}$. La mesure principale d'un angle orienté est celle qui appartient à l'intervalle $]-\pi,\pi]$.

Exercice 39. Trouver les mesures principales, puis les valeurs exactes du sinus et du cosinus des angles suivants :

1. $\frac{7\pi}{6}$
2. $\frac{4\pi}{3}$
3. $\frac{71\pi}{3}$
4. $-\frac{107\pi}{4}$
5. $-\frac{13\pi}{6}$
6. $\frac{130\pi}{7}$

Exercice 40. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes, puis représenter les solutions sur le cercle unité :

(1) $2\sin(x) + 1 = 0$ (2) $2\cos(x) + \sqrt{3} = 0$
(3) $\sin(3x) = \sin(x)$ (4) $\cos(2x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
(5) $4\sin^2(x) - 1 = 0$ (6) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(x)$

Exercice 41. Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ les inéquations suivantes :

(1) $2\sin(x) + \sqrt{2} < 0$ (2) $\sqrt{2}\cos(x) \geqslant 1$
(3) $4\cos^2(x) - 3 \leqslant 0$ (4) $2\cos^2(x) - 3\cos(x) - 2 \leqslant 0$

Exercice 42. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\cos(a + b)\cos(a - b) - \sin(a + b)\sin(a - b) = \cos(2a).$$

Exercice 43. 1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\quad \sin x \leqslant x$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad \cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$.