Feuille d'exercices n°3 - Correction
Fonctions usuelles

1 Fonctions logarithmes, exponentielles et puissances

Exercice 1. 1. Simplifier les écritures suivantes :

(1) $e^{\ln 3} = 3$

(2) $\dfrac{e^{3+\ln 8}}{e^{2+\ln 4}} = 2e$

(3) $\ln 3 + \ln \frac{1}{3} = 0$

(4) $\frac{1}{2}\ln\sqrt{2} = \frac{1}{4}\ln(2)$

(5) $e^{\ln(x-1)+\ln x} = x^2 - x$

(6) $\ln(e^{\frac{1}{x}}) + e^{-\ln x} = \frac{2}{x}$

(7) $2\sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt{125} = 6\sqrt{5}$

(8) $2\sqrt{32} - 3\sqrt{50} + 6\sqrt{8} = 5\sqrt{2}$

(9) $\left(2\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right) = \sqrt{10} - 1$

(10) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = 5\sqrt{3}$

2. Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$:

(1) $\ln 50 = \ln 2 + 2\ln 5$

(2) $\ln \frac{16}{25} = 4\ln 2 - 2\ln 5$

(3) $\ln 250 = \ln 2 + 3\ln 5$

3. Démontrer que : $\ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3}) = 0$.

$$\begin{aligned}\ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3}) &= \ln((2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}))\\ &= \ln(2^2 - \sqrt{3}^2)\\ &= \ln 1\\ &= 0.\end{aligned}$$

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes après avoir déterminé leur domaine de validité :

(1) $\ln(2-2x) = 1$

(2) $\ln(x^2-8) = 0$

(3) $e^{x+2} = 3$

(4) $(e^x+1)(e^x-4) = 0$

(5) $\ln(3x-4) = \ln(x^2-4)$

(6) $\ln(2x-1) > -1$

(7) $e^{\frac{x+1}{x}} > 3$

(8) $\ln(x-2) \leqslant \ln(2x-1)$

(9) $\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \geqslant \ln x$

(10) $e^{2x} < 2e^x$

(11) $e^{4x} - 3e^{2x} - 4 = 0$

(12) $\ln(5-x) - \ln 3 + \ln(x-1) \geqslant 0$

On note $\mathscr{D}$ le domaine de validité de l'équation ou l'inéquation considérée et $\mathscr{S}$ son ensemble de solutions.

(1) $\mathscr{D} =]-\infty;1[$ et $\mathscr{S} = \left\{1 - \frac{e}{2}\right\}$.

(2) $\mathscr{D} = \left]-\infty;-2\sqrt{2}\right[\cup \left]2\sqrt{2};+\infty\right[$ et $\mathscr{S} = \{-3;3\}$.

(3) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ et $\mathscr{S} = \{\ln(3)-2\}$.

(4) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ et $\mathscr{S} = \{\ln 4\}$.

(5) $\mathscr{D} =]2;+\infty[$ et $\mathscr{S} = \{3\}$.

(6) $\mathscr{D} = \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $\mathscr{S} = \left]\frac{4e+1}{3e};+\infty\right[$.

(7) $\mathscr{D} = \mathbb{R}^\star$ et $\mathscr{S} = \left]0;\frac{1}{\ln(3)-1}\right[$.

(8) $\mathscr{D} =]2;+\infty[$ et $\mathscr{S} =]2;+\infty[$.

(9) $\mathscr{D} =]0;+\infty[$ et $\mathscr{S} =]0;2]$.

(10) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ et $\mathscr{S} =]-\infty;\ln 2[$.

(11) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ et $\mathscr{S} = \{\ln 2\}$.

(12) $\mathscr{D} =]1;5[$ et $\mathscr{S} = [2;4]$.

Exercice 3. Soit $x \in \mathbb{R}^{+\star}$. On pose $a = \exp(x^2)$ et $b = \frac{1}{x}\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)$. Simplifier l'expression a^b.

$$\begin{aligned}
a^b &= \mathrm{e}^{b\ln(a)} \\
&= \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)\ln\left(\exp(x^2)\right)} \\
&= \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)\cdot x^2} \\
&= \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\ln(x)\cdot x^2} \\
&= \mathrm{e}^{\ln(x)} \\
&= x.
\end{aligned}$$

Exercice 4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2.$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \leqslant 0$.
2. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation : $2\ln x + \ln(2x+5) \leqslant \ln(2-x)$.

1. $P(x) = (x+1)(2x^2+3x-2)$
   En dressant un tableau de signe, on obtient :
   $\mathscr{S} =]-\infty;-2[\cup \left[-1;\frac{1}{2}\right]$.
2. Le domaine de validité de cette inéquation est $]0;2[$.
   Soit $x \in]0;2[$,

$$\begin{aligned}
2\ln x + \ln(2x+5) \leqslant \ln(2-x) &\iff \ln(x^2(2x+5)) \leqslant \ln(2-x) \\
&\iff x^2(2x+5) \leqslant 2-x \\
&\iff P(x) \leqslant 0 \\
&\iff x \in]-\infty;-2[\cup \left[-1;\frac{1}{2}\right]
\end{aligned}$$

   Ainsi l'ensemble des solutions de l'inéquation considérée est $\left]0;\frac{1}{2}\right]$.

2 Fonctions trigonométriques

Exercice 5. Trouver les mesures principales, puis les valeurs exactes du sinus et du cosinus des angles suivants :

1. $\frac{7\pi}{6}$ 2. $\frac{4\pi}{3}$ 3. $\frac{71\pi}{3}$ 4. $-\frac{107\pi}{4}$ 5. $-\frac{13\pi}{6}$ 6. $\frac{130\pi}{7}$

1. $-\frac{5\pi}{6}$ 2. $-\frac{2\pi}{3}$ 3. $\frac{5\pi}{3}$ 4. $-\frac{3\pi}{4}$ 5. $-\frac{\pi}{6}$ 6. $\frac{4\pi}{7}$

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes, puis représenter les solutions sur le cercle unité :

(1) $2\sin(x)+1=0$ (2) $2\cos(x)+\sqrt{3}=0$
(3) $\sin(3x)=\sin(x)$ (4) $\cos(2x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$
(5) $4\sin^2(x)-1=0$ (6) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos(x)$

(1) $\mathscr{S}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{-\frac{5\pi}{6}+2k\pi\ ,\ -\frac{\pi}{6}+2k\pi\right\}$

(2) $\mathscr{S}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{-\frac{5\pi}{6}+2k\pi\ ,\ \frac{5\pi}{6}+2k\pi\right\}$

(3) $\mathscr{S}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{2k\pi\ ,\ \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right\}$

(4) $\mathscr{S}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi\ ,\ -\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right\}$

(5) $\mathscr{S}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{-\frac{\pi}{6}+k\pi\ ,\ \frac{\pi}{6}+k\pi\right\}$

(6) $\mathscr{S}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{8}+k\pi\right\}$

Exercice 7. Résoudre dans $]-\pi,\pi]$ les inéquations suivantes :

(1) $2\sin(x)+\sqrt{2}<0$ (2) $\sqrt{2}\cos(x)\geqslant 1$
(3) $4\cos^2(x)-3\leqslant 0$ (4) $2\cos^2(x)-3\cos(x)-2\leqslant 0$

(1) $2\sin(x)+\sqrt{2}<0 \iff \sin(x)<-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\mathscr{S}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{3\pi}{4}+2k\pi,-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right[$

(2) $\sqrt{2}\cos(x)\geqslant 1 \iff \cos(x)\geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\mathscr{S}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{\pi}{4}+2k\pi\right[$

(3) $4\cos^2(x)-3\leqslant 0 \iff -\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\cos(x)\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\mathscr{S}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{5\pi}{6}+k\pi\right[$

(4) $2\cos^2(x)-3\cos(x)-2\leqslant 0 \iff -\frac{1}{2}\leqslant\cos(x)\leqslant 2$
$\mathscr{S}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right[$

Exercice 8. Montrer que pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$,

$$\cos(a+b)\cos(a-b)-\sin(a+b)\sin(a-b)=\cos(2a).$$

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\cos(a+b)\cos(a-b)-\sin(a+b)\sin(a-b)&=\cos\left((a+b)+(a-b)\right)\\&=\cos(2a).\end{aligned}$$

Exercice 9.
1. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, $\sin x\leqslant x$.
2. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\cos x\geqslant 1-\frac{x^2}{2}$.

1. On étudie la fonction $f(x)=\sin(x)-x$ sur $\mathbb{R}^+$. f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, $f(x)=\cos(x)-1\leqslant 0$. La fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, on a $f(x)\leqslant f(0)$, c'est-à-dire $\sin(x)-x\leqslant 0$.
2. On étudie la fonction $f(x)=\cos(x)-1+\frac{x^2}{2}$. f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=-\sin(x)+x$ et $f''(x)=-\cos(x)+1\geqslant 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$+$		$+$	
Variations de f'		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		$\searrow$	0	$\nearrow$	
Signe de $f(x)$		$+$	0	$+$	

Ainsi on a $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $\cos(x) \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.