Feuille d'exercices n°4 - Correction
Pratique calculatoire et fonctions

1 Limites

Exercice 1. Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^3-2x+3$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^3-2x+3$

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^4+x^2+3$

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+3}{1-x}$

(5) $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x^2+3}{1-x}$

(6) $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x^2+3}{1-x}$

(7) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+2}{(x+3)^2}$

(8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+2}{(x+3)^2}$

(9) $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{x+2}{(x+3)^2}$

(10) $\lim\limits_{x\to(-3)^+} \sqrt{\dfrac{x+4}{x+3}}$

(11) $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(12) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{-x^3+x^2+x}$

(13) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right)$

(14) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\dfrac{\pi x+1}{2x+1}\right)$

(15) $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\dfrac{\pi x+1}{x+2}\right)$

(16) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

(17) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1}+x$

(18) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2}-x$

(19) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{4x^2+1}+2x$

(20) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{-x^2+3x-2}{x-2}$

(21) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$

(22) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{3x^3-7x^2+x+2}{x^2-4}$

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^3-2x+3 = \lim\limits_{x\to+\infty} 5x^3 = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} 5x^3-2x+3 = \lim\limits_{x\to-\infty} 5x^3 = -\infty$.
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^4+x^2+3 = \lim\limits_{x\to-\infty} -2x^4 = -\infty$.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+3}{1-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$.
5. $\lim\limits_{x\to1^-} x^2+3 = 4$ et $\lim\limits_{x\to1^-} 1-x = 0^+$, donc $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x^2+3}{1-x} = +\infty$.
6. $\lim\limits_{x\to1^+} x^2+3 = 4$ et $\lim\limits_{x\to1^+} 1-x = 0^-$, donc $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x^2+3}{1-x} = -\infty$.
7. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+2}{(x+3)^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0^-$.
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+2}{(x+3)^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0^+$.
9. $\lim\limits_{x\to-3} x+2 = -1$ et $\lim\limits_{x\to-3} (x+3)^2 = 0^+$, donc $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{x+2}{(x+3)^2} = -\infty$.
10. $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^3+x^2+x = \lim\limits_{x\to-\infty} -x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{-x^3+x^2+x} = +\infty$.
11. $\lim\limits_{x\to(-3)^+} x+4 = 1$ et $\lim\limits_{x\to(-3)^+} x+3 = 0^+$, donc $\lim\limits_{x\to(-3)^+} \frac{x+4}{x+3} = +\infty$. D'où $\lim\limits_{x\to(-3)^+} \sqrt{\frac{x+4}{x+3}} = +\infty$.
12. $\lim\limits_{x\to1^-} 1-x^2 = 0^+$, donc $\lim\limits_{x\to1^-} \sqrt{1-x^2} = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$.

13. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0^+$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin x = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = -\infty$ (limite de composées).

14. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\pi x+1}{2x+1} = \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin(x) = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{\pi x+1}{2x+1}\right) = 1$ (limite d'une composée de fonctions).

15. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\pi x+1}{x+2} = \pi$ et $\lim\limits_{x\to\pi} \cos(x) = -1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{\pi x+1}{x+2}\right) = -1$ (limite d'une composée de fonctions).

16.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x} &= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}^2-\sqrt{x}^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\\ &= 0.\end{aligned}$$

17.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1}+x &= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}\\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}\\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\\ &= 0.\end{aligned}$$

18.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2}-x &= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2}-x\right)\frac{\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)}{\sqrt{x^2+2}+x}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}^2-x^2}{\sqrt{x^2+2}+x}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x}\\ &= 0.\end{aligned}$$

19.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \sqrt{4x^2+1}+2x &= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)\frac{\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)}{\sqrt{4x^2+1}-2x}\\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}^2-(2x)^2}{\sqrt{4x^2+1}-2x}\\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}-2x}\\ &= 0\end{aligned}$$

20. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-x^2+3x-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(-x+1)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} -x+1 = -1.$

21. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} x+1 = 2.$

22. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^3-7x^2+x+2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(3x^2-x-1)}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \frac{9}{4}.$

Exercice 2. Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim_{x\to+\infty} x - e^x$ (2) $\lim_{x\to+\infty} x^2 - \ln(x)$ (3) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x - e^x}$

(4) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(x)}{x}$ (5) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{2-\sin(x)}$ (6) $\lim_{x\to-\infty} x^2 + x\sin(x)$

(1) $\lim_{x\to+\infty} x - e^x = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(\dfrac{x}{e^x} - 1\right) = -\infty$ par croissance comparée.

(2) $\lim_{x\to+\infty} x^2 - \ln(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x^2}\right) = +\infty$ par croissance comparée.

(3) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x - e^x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{e^x}\dfrac{1}{\frac{x}{e^x} - 1} = 0$ par croissance comparée.

(4) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(x)}{x} = 0$ (théorème d'encadrement).

(5) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{2-\sin(x)} = +\infty$ (théorème de comparaison).

(6) $\lim_{x\to-\infty} x^2 + x\sin(x) = +\infty$ (théorème de comparaison).

2 Dérivées

Exercice 3. Représenter les fonctions suivantes. Sont-elles dérivables en 0 ?

(1) $f(x) = |x|$ (2) $f(x) = |x|^3$ (3) $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

(1) f n'est pas dérivable en 0.

(2) f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

(3) f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 4. Déterminer le domaine de définition, ainsi que la dérivée des fonctions suivantes :

(1) $f(x) = \frac{x^3-3x^2-1}{6}$ (2) $f(x) = \frac{1-2x}{x-2}$ (3) $f(x) = \ln(1-x^2)$

(4) $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2+x+1}$ (5) $f(x) = \left(x^2-3\right)^2$ (6) $f(x) = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^3$

(7) $f(x) = \cos(2x)$ (8) $f(x) = \sqrt{4-x}$ (9) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2-x}}$

(10) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ (11) $f(x) = e^{\sin(x)}$ (12) $f(x) = xe^{2x+3}$

(1) $\mathscr{D}_f = \mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{x^2-2x}{2}$

(2) $\mathscr{D}_f = \mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{2\}$ et $f'(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$

(3) $\mathscr{D}_f = \mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ et$f'(x) = \frac{-2x}{(1-x^2)}$

(4) $\mathscr{D}_f = \mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{3(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$

(5) $\mathscr{D}_f = \mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}$ et $f'(x) = 4x\left(x^2-3\right)$

(6) $\mathscr{D}_f = \mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$ et $f'(x) = \frac{3(x+1)^2}{(x+2)^4}$

(7) $\mathscr{D}_f = \mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}$ et $f'(x) = -2\sin(2x)$

(8) $\mathscr{D}_f =]-\infty,4]$, $\mathscr{D}_{f'} =]-\infty,4[$ et $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{4-x}}$

(9) $\mathscr{D}_f = [-1,2[$, $\mathscr{D}_{f'} =]-1,2[$ et $f'(x) = \frac{3}{(2-x)^2}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}$

(10) $\mathscr{D}_f = \mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x+1} - \frac{(x+1)(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{x^2+x+1} = \dfrac{1-x}{2(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}$

(11) $\mathscr{D}_f = \mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}$ et $f'(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$

(12) $\mathscr{D}_f = \mathscr{D}_{f'} = \mathbb{R}$ et $f'(x) = (1+2x)e^{2x+3}$

Exercice 5. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_0 :

(1) $f(x) = \mathrm{e}^x, \quad x_0 = 0$

(2) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}, \quad x_0 = 2$

1. L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $x = 0$ est $y = x + 1$.

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$. L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $x = 2$ est $y = -\frac{3}{25}x + \frac{16}{25}$.

3 Primitives

Exercice 6. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

(1) $f(x) = 2x^3 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^5}$ sur $]0, +\infty[$

(2) $f(x) = 4x\left(2x^2+1\right)^3$ sur $\mathbb{R}$

(3) $f(x) = (3x-2)^3$ sur $\mathbb{R}$

(4) $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^3}$ sur $\mathbb{R}$

(5) $f(x) = \cos(2x) - 3\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$

(6) $f(x) = \tan(x)$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

(7) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}$ sur $]-1, 1[$

(8) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x-1}}$ sur $\left]\frac{1}{4}, +\infty\right[$

(9) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$ sur $\mathbb{R}$

(10) $f(x) = \sin(x)\cos^4(x)$ sur $\mathbb{R}$

Une primitive de f est :

(1) $F(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2\ln(x) - \frac{1}{2x^4}$;

(2) $F(x) = \frac{\left(2x^2+1\right)^4}{4}$;

(3) $F(x) = \frac{1}{12}\left(3x-2\right)^4$;

(4) $F(x) = \dfrac{(x^2+x+1)^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2(x^2+x+1)^2}$;

(5) $F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + 3\cos(x)$;

(6) $f(x) = \tan(x) = -\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}$, $F(x) = -\ln(|\cos(x)|) = -\ln(\cos(x))$.

(7) $F(x) = \ln(|x-1|) + \ln(|x+1|) = \ln(|x^2-1|) = \ln(1-x^2)$.

(8) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x-1}} = \frac{2}{4} \times \dfrac{4}{2\sqrt{4x-1}}$, $F(x) = \frac{1}{2}\sqrt{4x-1}$;

(9) $f(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}$, $F(x) = \sqrt{x^2+2}$;

(10) $f(x) = -(-\sin(x))\cos^4(x)$, $F(x) = -\frac{\cos^5(x)}{5}$.

Exercice 7. Déterminer l'unique primitive de f vérifiant une condition donnée :

1. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad F(2) = 1$

2. $f(x) = \mathrm{e}^{3x+1}, \quad F(-1) = 0$

1. $F(x) = \frac{x^2}{2} + \ln(x) + C$, avec C à déterminer.
   $F(2) = 1$ donc $C = -1 - \ln(2)$ et $\boxed{F(x) = \dfrac{x^2}{2} + \ln(x) - 1 - \ln(2)}$.

2. $F(x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x+1} + C$, avec C à déterminer.
   $F(-1) = 0$, donc $C = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2}$ et $\boxed{F(x) = \dfrac{1}{3}\left(\mathrm{e}^{3x+1} - \mathrm{e}^{-2}\right)}$.

Exercice 8. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - x^2 - 4x + 4}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

2. Montrer qu'il existe a, b, c des réels tels que

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+2}.$$

3. En déduire une primitive de f sur $\mathcal{D}_f$.

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\}$,

$$f(x) = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{x-2} + \frac{1}{12} \times \frac{1}{x+2}$$

3. Une primitive de f est

$$F(x) = -\frac{1}{3}\ln(|x-1|) + \frac{1}{4}\ln(|x-2|) + \frac{1}{12}\ln(|x+2|).$$

Exercice 9. Calculer les intégrales suivantes :

(1) $\displaystyle\int_0^4 \mathrm{d}x$ (2) $\displaystyle\int_1^2 \left(t^2 + t - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$ (3) $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int_0^\pi \cos(2x)\,\mathrm{d}x$ (5) $\displaystyle\int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$ (6) $\displaystyle\int_0^1 t\exp\left(t^2-1\right)\,\mathrm{d}t$

(7) $\displaystyle\int_0^1 5\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$ (8) $\displaystyle\int_2^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$ (9) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,\mathrm{d}x$

(1) $\displaystyle\int_0^4 \mathrm{d}x = [x]_0^4 = 4$

(2) $\displaystyle\int_1^2 \left(t^2 + t - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t = \left[\tfrac{t^3}{3} + \tfrac{t^2}{2} - \ln(|t|)\right]_1^2 = \tfrac{23}{6} - \ln(2)$

(3) $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x]_{\ln 2}^{\ln 3} = 1$

(4) $\displaystyle\int_0^\pi \cos(2x)\,\mathrm{d}x = [\tfrac{1}{2}\sin(2x)]_0^\pi = 0$

(5) $\displaystyle\int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{x^2+1}\right]_0^2 = \tfrac{6}{5}$

(6) $\displaystyle\int_0^1 t\exp\left(t^2-1\right)\,\mathrm{d}t = \left[\tfrac{1}{2}\exp\left(t^2-1\right)\right]_0^1 = \tfrac{\mathrm{e}-1}{2\mathrm{e}}$

(7) $\displaystyle\int_0^1 5\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{5}{3}\mathrm{e}^{3x}\right]\int_0^1 = \tfrac{5}{3}(\mathrm{e}-1)$

(8) $\displaystyle\int_2^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\tfrac{1}{2}\ln(t)^2\right]_2^{\mathrm{e}} = \tfrac{1}{2}(1 - \ln(2)^2)$

(9) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,\mathrm{d}x = [-\ln(|\cos(x)|)]_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln 2$

Exercice 10. On considère les intégrales :

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x.$$

Calculer I, puis $I+J$. En déduire J.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x \\ &= [\ln(1+\mathrm{e}^x)]_0^1 \\ &= \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}}{2}\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} I+J &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x+1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 1\,\mathrm{d}x \\ &= 1 \end{aligned}$$

donc $J = 1 - I = 1 - \ln\left(\frac{1+\mathrm{e}}{2}\right)$.

Exercice 11.

Intégration par parties :

Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a;b]$,

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Calculer les intégrales suivantes, à l'aide d'une intégration par parties :

(1) $\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ (2) $\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x$ (3) $\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x$

(4) $\int_0^1 (2x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ (5) $\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t$ (6) $\int_1^{\mathrm{e}} x^n\ln x\,\mathrm{d}x$

(1) $\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 1$

(2) $\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^2+1\right)$

(3) $\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x = 2\ln 2 - 1$

(4) $\int_0^1 (2x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}+1$

(5) $\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t = x\ln x - x + 1$

(6) $\int_1^{\mathrm{e}} x^n\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^2}\left(n\mathrm{e}^{n+1}+1\right)$