Feuille d'exercices n°5
Calcul algébrique

Propriétés de $\sum$ et de $\prod$

Exercice 1. Soient $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, $(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $(z_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$ trois familles de nombres complexes, $\lambda\in\mathbb{C}$ et $p\in\mathbb{N}$.

1. Les relations suivantes sont-elles vraies ou fausses en général ?
   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$,
   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\times\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)$,
   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda a_k=\lambda\sum_{k=1}^{n}a_k$,
   (d) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^p=\sum_{k=1}^{n}a_k^p$.
2. Reprendre la question précédente en remplaçant tous les $\sum$ par des $\prod$.
3. On suppose que $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une famille de réels tels que $a_k>0$ pour tout $k\in\{1,\dots,n\}$. Transformer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln(a_k)$.
4. Est-il vrai que $\displaystyle\prod_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}z_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}z_{ij}$?

Sommes

Exercice 2.
1. Calculer la somme des n premiers entiers impairs.
2. Calculer la somme $S=1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+(n-1)\times n$.
3. Calculer la somme $T=1\times n+2\times(n-1)+\cdots+(n-1)\times2+n\times1$.

Exercice 3. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{3}\sum_{k=1}^{n}1$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{3}\sum_{k=1}^{n}k$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{3}\sum_{k=1}^{n}n$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$
5. $\displaystyle\sum_{k=1001}^{2016}3$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(6k^2+4k+1)$
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$
8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}3^{2k}$
9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(2^k+k^2+2\right)$
10. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1}\frac{2^i}{3^{2i-1}}$
11. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}i(i-1)$
12. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$
13. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(n-k)$
14. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)$
15. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(i+j)$

Exercice 4. 1. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$,
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Simplifier de deux façons différentes la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^2 - k^2\right)$ et retrouver ainsi l'expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$ vue en cours.
2. Adapter cette méthode pour retrouver l'expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$.

Produits

Exercice 6. Démontrer les égalités suivantes :

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k) = 2^n n!$
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 3x^2 = 3^n x^{2n}$
3. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} x^k = x^{\frac{n(n+1)}{2}}$
4. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k-1} = 2n+1$
5. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k} = \frac{(n+1)!}{2n}$
6. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} (2k+1) = \frac{(2n)!}{2^n\, n!}$

Factorielles et coefficients binomiaux

Exercice 7. Montrer sans récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,
$$2^{n-1} \leqslant n! \leqslant n^{n-1}.$$

Exercice 8. 1. Quel est le coefficient de x^6 dans le développement de $(x+2)^8$, puis de $(x^2-3)^7$?

2. Quel est le coefficient de x^3y^7 dans le développement de $(x-y)^{10}$?
3. Quel est le coefficient de x^6y^7 dans le développement de $(2x-y)^{13}$?

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer les expressions suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
2. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

Récurrences

Exercice 11. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$
3. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n\ n!}$