Feuille d'exercices n°5 - Correction
Calcul algébrique

Propriétés de $\sum$ et de $\prod$

Exercice 1. Soient $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, $(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $(z_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ trois familles de nombres complexes, $\lambda\in\mathbb{C}$ et $p\in\mathbb{N}$.

1. Les relations suivantes sont-elles vraies ou fausses en général ?
   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$,
   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\times\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)$,
   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda a_k=\lambda\sum_{k=1}^{n}a_k$,
   (d) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^p=\sum_{k=1}^{n}a_k^p$.
2. Reprendre la question précédente en remplaçant tous les $\sum$ par des $\prod$.
3. On suppose que $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une famille de réels tels que $a_k>0$ pour tout $k\in\{1,\dots,n\}$. Transformer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln(a_k)$.
4. Est-il vrai que $\displaystyle\prod_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}z_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}z_{ij}$?

1. (a) vrai
   (b) faux
   (c) vrai
   (d) faux
2. (a) faux
   (b) vrai
   (c) faux
   (d) vrai
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln(a_k)=\ln\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)$.
4. faux car $\displaystyle\prod_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}1\neq\sum_{j=1}^{2}\prod_{i=1}^{2}1$.

Sommes

Exercice 2.
1. Calculer la somme des n premiers entiers impairs.
2. Calculer la somme $S=1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+(n-1)\times n$.
3. Calculer la somme $T=1\times n+2\times(n-1)+\cdots+(n-1)\times2+n\times1$.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1=n^2$.

2.

$$\begin{aligned} S &= 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \cdots + (n-1)\times n \\ &= \sum_{k=2}^{n}(k-1)k \\ &= \sum_{k=2}^{n}\left(k^2-k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(k^2-k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n}k^2 - \sum_{k=1}^{n}k \\ &= \frac{(n-1)n(n+1)}{3}. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} T &= 1\times n + 2\times (n-1) + \cdots + (n-1)\times 2 + n\times 1 \\ &= \sum_{k=1}^{n}k(n+1-k) \\ &= (n+1)\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}k^2 \\ &= (n+1)\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \end{aligned}$$

Exercice 3. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{3}\sum_{k=1}^{n}1$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{3}\sum_{k=1}^{n}k$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{3}\sum_{k=1}^{n}n$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$
5. $\displaystyle\sum_{k=1001}^{2016}3$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(6k^2+4k+1)$
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$
8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}3^{2k}$
9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(2^k+k^2+2\right)$
10. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1}\frac{2^i}{3^{2i-1}}$
11. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}i(i-1)$
12. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$
13. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(n-k)$
14. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)$
15. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(i+j)$

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{3}\sum_{k=1}^{n}1 = \sum_{n=1}^{3}n = 1+2+3 = 6$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{3}\sum_{k=1}^{n}k = 1+(1+2)+(1+2+3) = 10$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{3}\sum_{k=1}^{n}n = 1+(2+2)+(3+3+3) = 14$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+1) = 2\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1 = 2\frac{n(n+1)}{2} + n = n^2+2n$
5. $\displaystyle\sum_{k=1001}^{2016}3 = 3\sum_{k=1001}^{2016}1 = 3\times(2016-1001+1) = 3048$
6. $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(6k^2+4k+1) &= 6\sum_{k=1}^{n}k^2 + 4\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1 \\ &= 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\frac{n(n+1)}{2} + n\end{aligned}$$
7. $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k - (-1)^0 \\ &= \frac{(-1)^{n+1}-1}{-1-1} - 1 \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair.}\end{cases}\end{aligned}$$
8.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} 3^{2k} &= \sum_{k=1}^{n} 9^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} 9^k - 1 \\ &= \frac{9^{n+1}-1}{9-1} - 1 \\ &= \frac{9}{8}(9^n - 1)\end{aligned}$$

9.
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(2^k + k^2 + 2\right) &= \sum_{k=1}^{n} 2^k + \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= \sum_{k=0}^{n} 2^k - 1 + \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= 2^{n+1} - 2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2n\end{aligned}$$

10.
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{2^i}{3^{2i-1}} &= 3\sum_{i=1}^{n+1}\left(\frac{2}{9}\right)^i \\ &= 3\left(\sum_{i=0}^{n+1}\left(\frac{2}{9}\right)^i - 1\right) \\ &= 3\left(\frac{\left(\frac{2}{9}\right)^{n+2} - 1}{\left(\frac{2}{9}\right) - 1} - 1\right)\end{aligned}$$

11.
$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} i(i-1) &= \sum_{i=0}^{n}(i^2 - i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} i^2 - \sum_{i=0}^{n} i) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n-1)n(n+1)}{3}\end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) \\ &= \sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) \\ &= \sum_{k=2}^{n}\left(\ln(k-1) + \ln(k+1) - 2\ln(k)\right) \\ &= \sum_{k=2}^{n}\left(\ln(k-1) - \ln(k)\right) + \sum_{k=2}^{n}\left(\ln(k+1) - \ln(k)\right) \\ &= \ln(1) - \ln(n) + \ln(n+1) - \ln(2) \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)\end{aligned}$$

13. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(n-k) = \sum_{j=0}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$

14. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1) = \sum_{j=1}^{n+1} j = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

15.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(i+j) &= \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}(i+j)\\
&= \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} i + \sum_{i=1}^{j-1} j\right)\\
&= \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} i + j\sum_{i=1}^{j-1} 1\right)\\
&= \sum_{j=2}^{n}\left(\frac{(j-1)j}{2} + j(j-1)\right)\\
&= \sum_{j=2}^{n}\left(\frac{(j-1)j}{2} + j(j-1)\right)\\
&= \sum_{j=2}^{n}\left(\frac{3}{2}(j^2-j)\right)\\
&= \frac{3}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(j^2-j\right)\\
&= \frac{3}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{j=1}^{n} j\right)\\
&= \frac{(n-1)n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

Exercice 4. 1. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\\
&= 1 - \frac{1}{n+1} \quad \text{(somme télescopique)}\\
&= \frac{n}{n+1}.
\end{aligned}$$

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Simplifier de deux façons différentes la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^2 - k^2\right)$ et retrouver ainsi l'expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$ vue en cours.

2. Adapter cette méthode pour retrouver l'expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$.

1. On note $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$. D'une part,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^2 - k^2\right) &= (n+1)^2 - 0^2 \quad \text{(somme téléscopique)}\\
&= (n+1)^2.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^2 - k^2\right) &= \sum_{k=0}^{n}(2k+1)\\
&= 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1\\
&= 2S + (n+1).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&2S+(n+1)=(n+1)^2\\
&\Longrightarrow 2S=(n+1)^2-(n+1)\\
&\Longrightarrow 2S=n(n+1)\\
&\Longrightarrow S=\frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

2. On note $S'=\sum_{k=0}^{n}k^2$. D'une part,

$$\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right)=(n+1)^3 \quad \text{(somme téléscopique).}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right)&=\sum_{k=0}^{n}(3k^2+3k+1)\\
&=3\sum_{k=0}^{n}k^2+3\sum_{k=0}^{n}k+\sum_{k=0}^{n}1\\
&=3S'+3\frac{n(n+1)}{2}+(n+1).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&3S'+3\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=(n+1)^3\\
&\Longrightarrow 6S'=2(n+1)^3-3n(n+1)-2(n+1)\\
&\Longrightarrow 6S'=(n+1)\left(2(n+1)^2-3n-2\right)\\
&\Longrightarrow 6S'=(n+1)\left(2n^2+n\right)\\
&\Longrightarrow S'=\frac{(n+1)\left(2n^2+n\right)}{6}
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{S'=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}.$$

Produits

Exercice 6. Démontrer les égalités suivantes :

1. $\prod_{k=1}^{n}(2k)=2^n n!$
2. $\prod_{k=1}^{n}3x^2=3^n x^{2n}$
3. $\prod_{k=0}^{n}x^k=x^{\frac{n(n+1)}{2}}$
4. $\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{2k-1}=2n+1$
5. $\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k}=\frac{(n+1)!}{2n}$
6. $\prod_{k=1}^{n-1}(2k+1)=\frac{(2n)!}{2^n\,n!}$

1. $\prod_{k=1}^{n}(2k)=\prod_{k=1}^{n}2\times\prod_{k=1}^{n}k=2^n n!$
2. $\prod_{k=1}^{n}3x^2=\prod_{k=1}^{n}3\times\prod_{k=1}^{n}x^2=3^n\times(x^2)^n=3^nx^{2n}$
3. $$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n}x^k&=x^0\times x^1\times x^2\times\times\cdots\times x^n\\
&=x^{0+1+2+\cdots+n}\\
&=x^{\sum_{k=0}^{n}k}\\
&=x^{\frac{n(n+1)}{2}}
\end{aligned}$$
4. $\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{2k-1}=\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)}{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}=\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)}{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}=\frac{2n+1}{1}=2n+1$
5. $$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k}&=\frac{\prod_{k=2}^{n}(k+1)\prod_{k=2}^{n}(k-1)}{\prod_{k=2}^{n}k}\\
&=\frac{\frac{(n+1)!}{2}\times(n-1)!}{n!}\\
&=\frac{(n+1)!}{2}\times\frac{(n-1)!}{n!}\\
&=\frac{(n+1)!}{2n}
\end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n-1}(2k+1) &= \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(2k+1)\times\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)}\\ &= \frac{(2n)!}{\prod_{k=1}^{n}2\times\prod_{k=1}^{n}k}\\ &= \frac{(2n)!}{2^n\, n!}\end{aligned}$$

Factorielles et coefficients binomiaux

Exercice 7. Montrer sans récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$,

$$2^{n-1}\leqslant n!\leqslant n^{n-1}.$$

Si $n=1$, on a bien $2^{n-1}\leqslant n!\leqslant n^{n-1}$.

Si $n\geqslant 2$, alors pour tout $k\in[\![2,n]\!]$, on a

$$2\leqslant k\leqslant n.$$

Donc

$$\prod_{k=2}^{n}2\leqslant\prod_{k=2}^{n}k\leqslant\prod_{k=2}^{n}n,$$

c'est-à-dire

$$2^{n-1}\leqslant n!\leqslant n^{n-1}.$$

Ainsi pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, $2^{n-1}\leqslant n!\leqslant n^{n-1}$.

Exercice 8.

1. Quel est le coefficient de x^6 dans le développement de $(x+2)^8$, puis de $(x^2-3)^7$?
2. Quel est le coefficient de x^3y^7 dans le développement de $(x-y)^{10}$?
3. Quel est le coefficient de x^6y^7 dans le développement de $(2x-y)^{13}$?

1.
$$\begin{aligned}(x+2)^8 &= \textstyle\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}x^k\times 2^{8-k}\\ &= \cdots+\tbinom{8}{6}x^6\times 2^2+\cdots\end{aligned}$$

Le coefficient de x^6 dans le développement de $(x+2)^8$ est $\boxed{\binom{8}{6}\times 2^2}$.
Le coefficient de x^6 dans le développement de $(x^2-3)^7$ est $\boxed{\binom{7}{3}(-3)^4}$.

2. Le coefficient de x^3y^7 dans le développement de $(x-y)^{10}$ est $\boxed{\binom{10}{3}(-1)^7}$.

3. Le coefficient de x^6y^7 dans le développement de $(2x-y)^{13}$ est $\boxed{\binom{13}{6}2^6(-1)^7}$.

Exercice 9.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k3^{n-k}=(2+3)^n=\boxed{5^n}$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k1^{n-k}=(2+1)^n=\boxed{3^n}$

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}=(1+1)^n=\boxed{2^n}$

4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=\boxed{\begin{cases}1 & \text{si } n=0,\\ 0 & \text{si } n\neq 0.\end{cases}}$

Exercice 10. Soit $n\in\mathbb{N}^\star$.

1. Soit $k\in[\![1,n]\!]$. Montrer que $k\dbinom{n}{k}=n\dbinom{n-1}{k-1}$.

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

2. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}\\ &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}\\ &= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\\ &= n\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell}\\ &= n\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell}1^{\ell}1^{n-1-\ell}\\ &= \boxed{n2^{n-1}}.\end{aligned}$$

Récurrences

Exercice 11. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n\frac{n(n+1)}{2}$
3. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n\ n!}$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}_n$: « $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ».

<u>Initialisation</u> : $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0^3 = 0$ et $\left(\frac{0(0+1)}{2}\right)^2 = 0$, donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k^3 = \left(\frac{0(0+1)}{2}\right)^2$ et $\mathscr{P}_0$ est vraie.

<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie et on montre $\mathscr{P}_{n+1}$, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3\\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \quad (\text{d'après } \mathscr{P}_n)\\ &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}\\ &= \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4}\\ &= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}\\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{2^2}\\ &= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2,\end{aligned}$$

donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}_n$: « $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$ ».

Initialisation : $\displaystyle\sum_{k=0}^{0}(-1)^k k^2 = (-1)^0 \times 0^2 = 0$ et $(-1)^0 \dfrac{0(0+1)}{2} = 0$, donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{0}(-1)^k k^2 = (-1)^0 \frac{0(0+1)}{2}$ et $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie et on montre $\mathscr{P}_{n+1}$, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k k^2 = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k k^2 &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2 + (-1)^{n+1}(n+1)^2 \\
&= (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+1}(n+1)^2 \quad (\text{d'après } \mathscr{P}_n) \\
&= (-1)^n \frac{n(n+1) - 2(n+1)^2}{2} \\
&= (-1)^n \frac{(n+1)(n-2(n+1))}{2} \\
&= (-1)^n \frac{(n+1)(-n-2)}{2} \\
&= (-1)^{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{2},
\end{aligned}$$

donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}_n$: « $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n\ n!}$ ».

Initialisation : $\displaystyle\prod_{k=0}^{0}(2k+1) = 2 \times 0 + 1 = 1$ et $\dfrac{(2 \cdot 0+1)!}{2^0 \times 0!} = \dfrac{1!}{1} = 1$, donc $\displaystyle\prod_{k=0}^{0}(2k+1) = \frac{(2 \cdot 0+1)!}{2^0 \times 0!}$ et $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie et on montre $\mathscr{P}_{n+1}$, c'est-à-dire $\displaystyle\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1) = \frac{(2n+3)!}{2^{n+1}\ (n+1)!}$.

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1) &= \prod_{k=0}^{n}(2k+1) \times (2n+3) \\
&= \frac{(2n+1)!}{2^n\ n!} \times (2n+3) \\
&= \frac{(2n+3)!}{2^n\ n! \times (2n+2)} \\
&= \frac{(2n+3)!}{2^n\ n! \times 2(n+1)} \\
&= \frac{(2n+3)!}{2^{n+1}\ (n+1)!},
\end{aligned}$$

donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n\ n!}$.