Feuille d'exercices n°6

Les nombres complexes

Exercice 1. Écrire sous forme algébrique les nombres suivants :

1. $z_1 = (3-2i)-(1+i)$
2. $z_2 = 2i(1-i)$
3. $z_3 = (2+i)(5-4i)$
4. $z_4 = (1-2i)^5$
5. $z_5 = \dfrac{4+3i}{1+2i}$
6. $z_6 = \dfrac{(2+i)^3}{(1+2i)^2}$
7. $z_7 = \mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{6}}$
8. $z_8 = 2\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$
9. $z_9 = (1+i)^{2020}$

Exercice 2. Écrire sous forme exponentielle les nombres suivants :

1. $z_1 = i$
2. $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
3. $z_3 = 2+2i\sqrt{3}$
4. $z_4 = (-1-i)i$
5. $z_5 = \dfrac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{3}}$
6. $z_6 = (-3-3i)^5$
7. $z_7 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$
8. $z_8 = \sin\frac{\pi}{6} - i\cos\frac{\pi}{6}$
9. $z_9 = \sin\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8}$

Exercice 3.
1. Écrire sous forme exponentielle les complexes suivants :
$$z_1 = -1-i \qquad z_2 = 1-\sqrt{3}i \qquad z_3 = z_1 \times z_2.$$
2. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

Exercice 4.
1. Déterminer la forme trigonométrique du complexe $z = 1+i\sqrt{3}$.
2. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $\left(1+i\sqrt{3}\right)^n$ soit un réel positif.

Exercice 5. Soit $z \in \mathbb{C}$.
1. Montrer que $|z-i| = |z+i|$ si et seulement si z est réel.
2. Montrer que $|z-1| = |iz+i|$ si et seulement si z est un imaginaire pur.

Exercice 6. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ vérifiant $(c,d) \neq (0,0)$ pour que $\dfrac{a+ib}{c+id}$ soit réel.

Exercice 7.
1. Linéariser les expressions suivantes :
   (a) $\cos^4(x)$
   (b) $\sin^3(x)$
   (c) $\cos(x)\sin^2(x)$
   (d) $\cos^2(x)\sin^3(x)$
2. Factoriser les expressions suivantes :
   (a) $\cos(2x)$
   (b) $\cos(x) + 2\cos(2x) + \cos(3x)$
   (c) $\sin(x) + \sin(3x) + \sin(5x)$

Exercice 8. Soient p et q deux nombres réels.
1. Factoriser l'expression $\mathrm{e}^{ip} + \mathrm{e}^{iq}$ par $\mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}}$.
2. En déduire une factorisation de $\cos(p) + \cos(q)$.
3. Résoudre l'équation $\cos(x) + \cos(3x) \geqslant 0$ d'inconnue $x \in]-\pi, \pi]$.

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(3+5i)z = 1 - z$
2. $\dfrac{1}{z+i} = 3 + i$
3. $\dfrac{z+1}{z-1} = 2i$
4. $i\overline{z} = 1 - i$
5. $(i\overline{z}+1)(z+3i) = 0$
6. $\dfrac{1+2iz}{1+2z} = i\dfrac{z-1}{z+3}$

Exercice 10. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $2z^2 - 6z + 5 = 0$
2. $z^2 + z + 1 = 0$
3. $z^2 = z + 1$
4. $z^2 - (1+2i)z + i - 1 = 0$
5. $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$
6. $z^2 - (3+4i)z - 1 + 5i = 0$
7. $z^4 + z^2 + 1 = 0$
8. $z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0$

Exercice 11.

1. Représenter les racines sixièmes de l'unité et les racines quatrièmes de -1.
2. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = 0.$$

Exercice 12.

1. Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :
   (a) $z_1 = 9$
   (b) $z_2 = -9$
   (c) $z_3 = i$
   (d) $z_4 = 3 + 4i$
   (e) $z_5 = 5 + 12i$
   (f) $z_6 = 9 - 40i$
2. Déterminer les racines cubiques de $-2 + 2i$.
3. Déterminer les racines cinquièmes de $-i$.
4. Déterminer les racines sixièmes de $2e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

Exercice 13. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^3 - 1 = 0$
2. $z^4 = i$
3. $z^{10} = \sqrt{3} + i$

Exercice 14. Soit $n \geqslant 2$ un entier.

Résoudre l'équation $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 15. On pose $u = e^{\mathbf{i}\frac{2\pi}{7}}$. Calculer

$$\frac{u}{1+u^2} + \frac{u^2}{1+u^4} + \frac{u^3}{1+u^6}.$$

Exercice 16.

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer les sommes suivantes :
   (a) $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$
   (b) $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer la somme et le produit des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

Exercice 17. Soient $A(1,1)$ et $B(-1,2)$ deux points du plan.

1. Déterminer les points M du plan tels que ABM soit un triangle équilatéral.
2. Déterminer les points M du plan tels que ABM soit un triangle rectangle isocèle en A.

Exercice 18. Déterminer et représenter l'ensemble points M d'affixe z tels que :

1. $|z - 2i| = 3$
2. $|z + 3 + i| \leqslant 2$
3. $\arg(z - i) = \dfrac{\pi}{6}$
4. $\dfrac{|z-3|}{|z-5|} = 1$

Exercice 19. Déterminer l'expression des transformations suivantes :

1. f_1 la translation de vecteur $\vec{V}$ d'affixe $2 - 3i$.
2. f_2 la rotation de centre A d'affixe $1 + i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$
3. f_3 l'homothétie de centre A d'affixe $1 + i$ et de rapport $\sqrt{2}$.

Exercice 20. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f dans les cas suivants :

1. $f(z) = z - 1 - i$
2. $f(z) = \dfrac{1}{2}z - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
3. $f(z) = \sqrt{3}z$
4. $f(z) = iz - 3i + 3$