

Feuille d'exercices n°6 – Correction

Les nombres complexes

Exercice 1. Écrire sous forme algébrique les nombres suivants :

$$\begin{array}{lll}
 1. z_1 = (3 - 2i) - (1 + i) & 2. z_2 = 2i(1 - i) & 3. z_3 = (2 + i)(5 - 4i) \\
 4. z_4 = (1 - 2i)^5 & 5. z_5 = \frac{4 + 3i}{1 + 2i} & 6. z_6 = \frac{(2 + i)^3}{(1 + 2i)^2} \\
 7. z_7 = e^{i\frac{7\pi}{6}} & 8. z_8 = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{3}} & 9. z_9 = (1 + i)^{2020}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 1. z_1 = 2 - 3i & 2. z_2 = 2 + 2i & 3. z_3 = 14 - 3i \\
 4. z_4 = 41 + 38i & 5. z_5 = 2 - i & 6. z_6 = \frac{38}{25} - \frac{41}{25}i \\
 7. z_7 = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i & 8. z_8 = \sqrt{3} - i & 9. z_9 = -2^{1010}
 \end{array}$$

Exercice 2. Écrire sous forme exponentielle les nombres suivants :

$$\begin{array}{lll}
 1. z_1 = i & 2. z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i & 3. z_3 = 2 + 2i\sqrt{3} \\
 4. z_4 = (-1 - i)i & 5. z_5 = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{1 - i\sqrt{3}} & 6. z_6 = (-3 - 3i)^5 \\
 7. z_7 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} & 8. z_8 = \sin \frac{\pi}{6} - i \cos \frac{\pi}{6} & 9. z_9 = \sin \frac{\pi}{8} + i \cos \frac{\pi}{8}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 1. z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} \\
 2. z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}} \\
 3. z_3 = 4e^{i\frac{\pi}{3}}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 4. z_4 = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \\
 5. z_5 = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{i(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3})} = e^{i\frac{\pi}{12}} \\
 6. z_6 = (3e^{i\frac{3\pi}{4}})^5 = 3^5 \times \sqrt{2}^5 e^{-i\frac{15\pi}{4}} \\
 7. z_7 = e^{i\frac{\pi}{6}} \\
 8. z_8 = e^{-i\frac{\pi}{3}} \\
 9. z_9 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)} = e^{i\frac{3\pi}{8}}
 \end{array}$$

Exercice 3. 1. Écrire sous forme exponentielle les complexes suivants :

$$\begin{array}{l}
 z_1 = -1 - i \quad z_2 = 1 - \sqrt{3}i \quad z_3 = z_1 \times z_2 \\
 z_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}, z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ et } z_3 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{13\pi}{12}}.
 \end{array}$$

2. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

D'une part,

$$\begin{aligned}
 z_3 &= 2\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{13\pi}{12}\right) \right) \\
 &= 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{13\pi}{12}\right) \right).
 \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
 z_3 &= z_1 \times z_2 \\
 &= (-1 - i) \times (1 - \sqrt{2}i) \\
 &= (-1 - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 1)i.
 \end{aligned}$$

On a donc

$$2\sqrt{2} \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + 2\sqrt{2} \sin\left(\frac{13\pi}{12}\right) i = (-1 - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 1) i$$

$$\iff \begin{cases} 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -1 - \sqrt{3} \\ 2\sqrt{2} \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \sqrt{3} - 1 \end{cases}$$

$$\iff \boxed{\begin{cases} \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \end{cases}}$$

Exercice 4. 1. Déterminer la forme trigonométrique du complexe

$$z = 1 + i\sqrt{3}.$$

$$z = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right).$$

2. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $(1 + i\sqrt{3})^n$ soit un réel positif.

$$\begin{aligned} (1 + i\sqrt{3})^n &= z^n \\ &= 2^n \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)^n \\ &= 2^n \left(\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) \right) \end{aligned}$$

d'après la formule de Moivre.

z^n est un réel positif si et seulement si $\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) \geq 0$ et $\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) = 0$, si et seulement si n est un multiple de 6.

Exercice 5. Soit $z \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que $|z - i| = |z + i|$ si et seulement si z est réel.
2. Montrer que $|z - 1| = |iz + i|$ si et seulement si z est un imaginaire pur.

Rappel : $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.

1.

$$\begin{aligned} |z - i| = |z + i| &\iff (z - i)\overline{(z - i)} = (z + i)\overline{(z + i)} \\ &\iff (z - i)(\bar{z} - \bar{i}) = (z + i)(\bar{z} + \bar{i}) \\ &\iff (z - i)(\bar{z} + i) = (z + i)(\bar{z} - i) \\ &\iff z\bar{z} + iz - i\bar{z} - i^2 = z\bar{z} - iz + i\bar{z} - i^2 \\ &\iff 2i(z - \bar{z}) = 0 \\ &\iff z - \bar{z} = 0 \\ &\iff 2i\operatorname{Im}(z) = 0 \\ &\iff \operatorname{Im}(z) = 0 \\ &\iff z \text{ est réel.} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} |z - 1| = |iz + i| &\iff |z - 1| = |i(z + 1)| \\ &\iff |z - 1| = |i| |z + 1| \\ &\iff (z - 1)\overline{(z - 1)} = (z + 1)\overline{(z + 1)} \\ &\iff (z - 1)(\bar{z} - \bar{1}) = (z + 1)(\bar{z} + \bar{1}) \\ &\iff (z - 1)(\bar{z} - 1) = (z + 1)(\bar{z} + 1) \\ &\iff z\bar{z} - z - \bar{z} + 1 = z\bar{z} + z + \bar{z} + 1 \\ &\iff 0 = 2(z + \bar{z}) \\ &\iff 0 = 4\operatorname{Re}(z) \\ &\iff z \text{ est un imaginaire pur.} \end{aligned}$$

Exercice 6. Donner une condition nécessaire et suffisante sur

$(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ vérifiant $(c, d) \neq (0, 0)$ pour que $\frac{a + ib}{c + id}$ soit réel.

Commençons par déterminer la forme algébrique du complexe $\frac{a + ib}{c + id}$:

$$\begin{aligned} \frac{a + ib}{c + id} &= \frac{a + ib}{c + id} \times \frac{c - id}{c - id} \\ &= \frac{(a + ib)(c - id)}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{a + ib}{c + id} \text{ est réel} &\iff \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} = 0 \\ &\iff bc - ad = 0. \end{aligned}$$

Exercice 7. 1. Linéariser les expressions suivantes :

- (a) $\cos^4(x)$ (b) $\sin^3(x)$
(c) $\cos(x) \sin^2(x)$ (d) $\cos^2(x) \sin^3(x)$

2. Factoriser les expressions suivantes :

- (a) $\cos(2x)$
(b) $\cos(x) + 2 \cos(2x) + \cos(3x)$
(c) $\sin(x) + \sin(3x) + \sin(5x)$

(a)

$$\begin{aligned} \cos^4(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 \\ &= \frac{1}{2^4} (e^{i4x} + 4e^{i2x} + 6 + 4e^{-i2x} + e^{-i4x}) \\ &= \frac{1}{2^4} (2 \cos(4x) + 8 \cos(2x) + 6) \\ &= \boxed{\frac{1}{8} \cos(4x) + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{3}{8}}. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \sin^3(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 \\ &= \frac{1}{(2i)^3} (e^{i3x} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-i3x}) \\ &= \frac{1}{(2i)^3} (e^{i3x} - e^{-i3x} - 3(e^{ix} - e^{-ix})) \\ &= \frac{1}{(2i)^3} (2i \sin(3x) - 3 \times 2i \sin(x)) \\ &= \boxed{-\frac{1}{4} \sin(3x) + \frac{3}{4} \sin(x)}. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\cos(x) \sin^2(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right) \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 \\
&= \frac{1}{-8} (e^{ix} + e^{-ix}) (e^{i2x} - 2 + e^{-i2x}) \\
&= -\frac{1}{8} (e^{i3x} - 2e^{ix} + e^{-ix} + e^{ix} - 2e^{-ix} + e^{-i3x}) \\
&= -\frac{1}{8} (e^{i3x} + e^{-i3x} - (e^{ix} + e^{-ix})) \\
&= \boxed{-\frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{1}{4} \cos(x)}.
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\cos^2(x) \sin^3(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 \\
&= -\frac{1}{2^5 i} (e^{i2x} + 2 + e^{-i2x}) (e^{i3x} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-i3x}) \\
&= -\frac{1}{2^5 i} (e^{i5x} - 3e^{i3x} + 3e^{ix} - e^{-ix} + \\
&\quad 2e^{i3x} - 6e^{ix} + 6e^{-ix} - 2e^{-i3x} + \\
&\quad e^{ix} - 3e^{-ix} + 3e^{-i3x} - e^{-i5x}) \\
&= -\frac{1}{2^5 i} (e^{i5x} - e^{-i5x} - (e^{i3x} - e^{-i3x}) - 2(e^{ix} - e^{-ix})) \\
&= \boxed{-\frac{1}{16} \sin(5x) + \frac{1}{16} \sin(3x) + \frac{1}{8} \sin(x)}.
\end{aligned}$$

(a)

$$\begin{aligned}
\cos(2x) &= \operatorname{Re} [e^{i2x}] \\
&= \operatorname{Re} [(e^{ix})^2] \\
&= \operatorname{Re} [(\cos(x) + i \sin(x))^2] \\
&= \operatorname{Re} [\cos^2(x) + i \times 2 \cos(x) \sin(x) - \sin^2(x)] \\
&= \boxed{\cos^2(x) - \sin^2(x)}.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\cos(3x) &= \operatorname{Re} [e^{i3x}] \\
&= \operatorname{Re} [(e^{ix})^3] \\
&= \operatorname{Re} [(\cos(x) + i \sin(x))^3] \\
&= \cos^3(x) - 3 \cos(x) \sin^2(x)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\cos(x) + 2 \cos(2x) + \cos(3x) \\
&= \cos(x) + 2(\cos^2(x) - \sin^2(x)) + \cos^3(x) - 3 \cos(x) \sin^2(x) \\
&= \cos(x) + 2(2 \cos^2(x) - 1) + \cos^3(x) - 3 \cos(x) (1 - \cos^2(x)) \\
&\quad \text{en remplaçant } \sin^2(x) \text{ par } 1 - \cos^2(x) \\
&= 4 \cos^3(x) + 4 \cos^2(x) - 2 \cos(x) - 2
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\sin(3x) &= \operatorname{Im} [(\cos(x) + i \sin(x))^3] \\
&= 3 \cos^2(x) \sin(x) - \sin^3(x)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sin(5x) &= \operatorname{Im} [(\cos(x) + i \sin(x))^5] \\ &= 5 \cos^4(x) \sin(x) - 10 \cos^2(x) \sin^3(x) + \sin^5(x).\end{aligned}$$

Exercice 8. Soient p et q deux nombres réels.

- Factoriser l'expression $e^{ip} + e^{iq}$ par $e^{i\frac{p+q}{2}}$.
- En déduire une factorisation de $\cos(p) + \cos(q)$.
- Résoudre l'équation $\cos(x) + \cos(3x) \geq 0$ d'inconnue $x \in]-\pi, \pi]$.

1.

$$\begin{aligned}e^{ip} + e^{iq} &= e^{i\frac{p+q}{2}} \times \frac{e^{ip} + e^{iq}}{e^{i\frac{p+q}{2}}} \\ &= e^{i\frac{p+q}{2}} \times \left(\frac{e^{ip}}{e^{i\frac{p+q}{2}}} + \frac{e^{iq}}{e^{i\frac{p+q}{2}}} \right) \\ &= e^{i\frac{p+q}{2}} \times \left(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}} \right) \\ &= e^{i\frac{p+q}{2}} \times 2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).\end{aligned}$$

Conclusion :

$$e^{ip} + e^{iq} = 2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) e^{i\frac{p+q}{2}}.$$

2. On déduit de ce qui précède

$$\operatorname{Re} [e^{ip} + e^{iq}] = \operatorname{Re} \left[2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) e^{i\frac{p+q}{2}} \right],$$

c'est-à-dire

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right).$$

3.

$$\begin{aligned}\cos(x) + \cos(3x) \geq 0 &\iff 2 \cos\left(\frac{x-3x}{2}\right) \cos\left(\frac{x+3x}{2}\right) \geq 0 \\ &\iff \cos(-x) \cos(2x) \geq 0 \\ &\iff \cos(x) \cos(2x) \geq 0\end{aligned}$$

Exercice 9. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

- | | | |
|--|---|---|
| 1. $(3 + 5i)z = 1 - z$ | 2. $\frac{1}{z+i} = 3 + i$ | 3. $\frac{z+1}{z-1} = 2i$ |
| 4. $i\bar{z} = 1 - i$ | 5. $(i\bar{z} + 1)(z + 3i) = 0$ | 6. $\frac{1+2iz}{1+2z} = i \frac{z-1}{z+3}$ |
| 1. $\mathcal{S} = \left\{ \frac{4}{41} - \frac{5}{41}i \right\}$ | 2. $\mathcal{S} = \left\{ \frac{3}{10} - \frac{11}{10}i \right\}$ | 3. $\mathcal{S} = \left\{ \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \right\}$ |
| 4. $\mathcal{S} = \{-1 + i\}$ | 5. $\mathcal{S} = \{-i, -3i\}$ | 6. $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \right\}$ |

Exercice 10. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

- | | |
|------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $2z^2 - 6z + 5 = 0$ | 2. $z^2 + z + 1 = 0$ |
| 3. $z^2 = z + 1$ | 4. $z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0$ |
| 5. $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$ | 6. $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$ |
| 7. $z^4 + z^2 + 1 = 0$ | 8. $z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0$ |

1. $\mathcal{S} = \left\{ \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i ; \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \right\}$
2. $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i ; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}$
3. $\mathcal{S} = \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2} ; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$
4. $\mathcal{S} = \{1 + i ; i\}$
5. $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\sqrt{3}-2}{2} - \frac{1}{2}i ; \frac{\sqrt{3}+2}{2} + \frac{1}{2}i \right\}$
6. $\mathcal{S} = \{2 + 3i ; 1 + i\}$
7. $\mathcal{S} = \left\{ -e^{-i\frac{\pi}{3}} ; e^{-i\frac{\pi}{3}} ; -e^{i\frac{\pi}{3}} ; e^{i\frac{\pi}{3}} \right\}$
8. $\mathcal{S} = \left\{ -1 ; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i ; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}$

Exercice 11. 1. Représenter les racines sixièmes de l'unité et les racines quatrièmes de -1 .

2. Soit $n \geq 2$ un entier. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = 0.$$

1. Les racines sixièmes de l'unité sont $e^{i\frac{2k\pi}{6}}$ avec $k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$. (à représenter)

Les racines quatrièmes de -1 sont $e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2})}$ avec $k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$. (à représenter)

2.

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = 0 \iff \frac{1 - z^n}{1 - z} = 0 \quad (z \neq 1)$$

$$\iff 1 - z^n = 0$$

$$\iff z^n = 1$$

$$\iff z = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \quad k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket.$$

Conclusion : $\mathcal{S} = \cup_n \setminus \{1\} = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \right\}$.

Exercice 12. 1. Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

- | | | |
|--------------------|---------------------|---------------------|
| (a) $z_1 = 9$ | (b) $z_2 = -9$ | (c) $z_3 = i$ |
| (d) $z_4 = 3 + 4i$ | (e) $z_5 = 5 + 12i$ | (f) $z_6 = 9 - 40i$ |

2. Déterminer les racines cubiques de $-2 + 2i$.

3. Déterminer les racines cinquièmes de $-i$.

4. Déterminer les racines sixièmes de $2e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

1.

(a) Les racines carrées de 9 sont -3 et 3 .

(b) Les racines carrées de -9 sont $-3i$ et $3i$.

(c) Les racines carrées de i sont $-e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $e^{i\frac{\pi}{4}}$.

(d) On recherche les racines carrées de $3 + 4i$ sont la forme

$$z = x + iy :$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |3 + 4i| & (1) \\ x^2 - y^2 = 3 & (2) \\ 2xy = 4 & (3) \end{cases}$$

Les racines carrées de $3 + 4i$ sont $2 + i$ et $-2 - i$.

(e) Les racines carrées de $5 + 12i$ sont $3 + 2i$ et $-3 - 2i$.

(f) Les racines carrées de $9 - 40i$ sont $5 - 4i$ et $-5 + 4i$.

2. Les racines cubiques de $-2 + 2i$ sont $\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3})}$ avec $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$.

3. Les racines cinquièmes de $-i$ sont $e^{i(-\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5})}$ avec $k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$.

4. Les racines sixièmes de $2e^{i\frac{3\pi}{2}}$ sont $2^{\frac{1}{6}}e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3})}$ avec $k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$.

Exercice 13. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

1. $z^3 - 1 = 0$

2. $z^4 = i$

3. $z^{10} = \sqrt{3} + i$

1. $\mathcal{S} = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{3}}, k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket \right\}$

$$2. \mathcal{S} = \left\{ e^{i\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right)}, k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket \right\}$$

$$3. \mathcal{S} = \left\{ 2^{\frac{1}{10}} e^{i\left(\frac{\pi}{60} + \frac{k\pi}{5}\right)}, k \in \llbracket 0, 9 \rrbracket \right\}$$

Exercice 14. Soit $n \geq 2$ un entier.

Résoudre l'équation $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

$$z^{2n} - z^n + 1 - i = 0 \iff Z^2 - Z + 1 - i = 0 \text{ en posant } Z = z^n$$

$$(\Delta = -3 + 4i, \delta = 1 + 2i)$$

$$\iff Z = 1 + i \text{ ou } Z = -i$$

$$\iff z^n = 1 + i \text{ ou } z^n = -i$$

$$\iff z^n = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ ou } z^n = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$\iff z = 2^{\frac{1}{2n}} e^{i\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \text{ ou } z = e^{i\left(-\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \text{ avec } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket.$$

$$\text{Conclusion : } \mathcal{S} = \left\{ 2^{\frac{1}{2n}} e^{i\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, e^{i\left(-\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}.$$

Exercice 15. On pose $u = e^{i\frac{2\pi}{7}}$. Calculer

$$\frac{u}{1+u^2} + \frac{u^2}{1+u^4} + \frac{u^3}{1+u^6}.$$

u est une racine septième de l'unité : $u^7 = 1$. De plus, $1 + u + u^2 + u^3 +$

$$u^4 + u^5 + u^6 = 0.$$

$$\begin{aligned} & \frac{u}{1+u^2} + \frac{u^2}{1+u^4} + \frac{u^3}{1+u^6} \\ &= \frac{u(1+u^4)(1+u^6) + u^2(1+u^2)(1+u^6) + u^3(1+u^2)(1+u^4)}{u(1+u^4)(1+u^6) + u^2(1+u^2)(1+u^6) + u^3(1+u^2)(1+u^4)} \\ &= \frac{(1+u^2)(1+u^4)(1+u^6)}{u+u^5+u^7+u^{11}+u^2+u^4+u^8+u^{10}+u^3+u^5+u^7+u^9} \\ &= \frac{1+u^2+u^4+u^6+u^6+u^8+u^{10}+u^{12}}{u+u^5+1+u^4+u^2+u^4+u+u^3+u^3+u^5+1+u^2} \\ &= \frac{1+u^2+u^4+u^6+u^6+u+u^3+u^5}{2(1+u+u^2+u^3+u^4+u^5)} \\ &= \frac{1+u+u^2+u^3+u^4+u^5+u^6+u^6}{2 \times (-u^6)} \\ &= \frac{0+u^6}{-2} \\ &= -2. \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\frac{u}{1+u^2} + \frac{u^2}{1+u^4} + \frac{u^3}{1+u^6} = -2.$$

Exercice 16. 1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer les sommes suivantes :

$$(a) \quad S_1 = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \quad (b) \quad S_2 = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme et le produit des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

$$1. \quad S_1 = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \sum_{k=0}^n \operatorname{Re} \left[e^{ik\theta} \right] = \operatorname{Re} \left[\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} \right] \quad \text{et}$$

$$S_2 = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta) = \text{Im} \left[\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} \right].$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} &= \sum_{k=0}^n (e^{i\theta})^k \\ &= \begin{cases} \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} & \text{si } e^{i\theta} \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } e^{i\theta} = 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}} \mathcal{Z} \sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}} \mathcal{Z} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} & \text{si } \theta \neq 0[2\pi] \\ n + 1 & \text{si } \theta = 0[2\pi] \end{cases} \\ &= \begin{cases} e^{i\frac{n\theta}{2}} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} & \text{si } \theta \neq 0[2\pi] \\ n + 1 & \text{si } \theta = 0[2\pi] \end{cases}. \end{aligned}$$

Conclusion : Si $\theta \neq 0[2\pi]$,

$$S_1 = \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad \text{et} \quad S_2 = \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Si $\theta = 0[2\pi]$,

$$S_1 = n + 1 \quad \text{et} \quad S_2 = 0.$$

produit (resp. la somme) des racines n -ièmes .

$$\begin{aligned} P &= \prod_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{2\pi}{n}} \right)^k \\ &= \left(e^{i\frac{2\pi}{n}} \right)^{\sum_{k=0}^{n-1} k} \\ &= \left(e^{i\frac{2\pi}{n}} \right)^{\frac{n(n-1)}{2}} \\ &= \left(e^{i\frac{2\pi}{n} \times n} \right)^{\frac{n-1}{2}} \\ &= 1^{\frac{n-1}{2}} \\ &= \boxed{1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{2\pi}{n}} \right)^k \\ &= \frac{\left(e^{i\frac{2\pi}{n}} \right)^n - 1}{e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1} \\ &= \frac{e^{i2\pi} - 1}{e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1} \\ &= \boxed{0}. \end{aligned}$$

Exercice 17. Soient $A(1, 1)$ et $B(-1, 2)$ deux points du plan.

1. Déterminer les points M du plan tels que ABM soit un triangle équilatéral.
2. Déterminer les points M du plan tels que ABM soit un triangle

2. Rappel : $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$. On note P (resp. S) le

rectangle isocèle en A .

1. A est le point d'affixe $z_A = 1+i$ et B , celui d'affixe $z_B = -1+2i$.

Soit M un point du plan d'affixe z .

$$ABM \text{ équilatéral} \iff AM = AB \text{ et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \pm \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

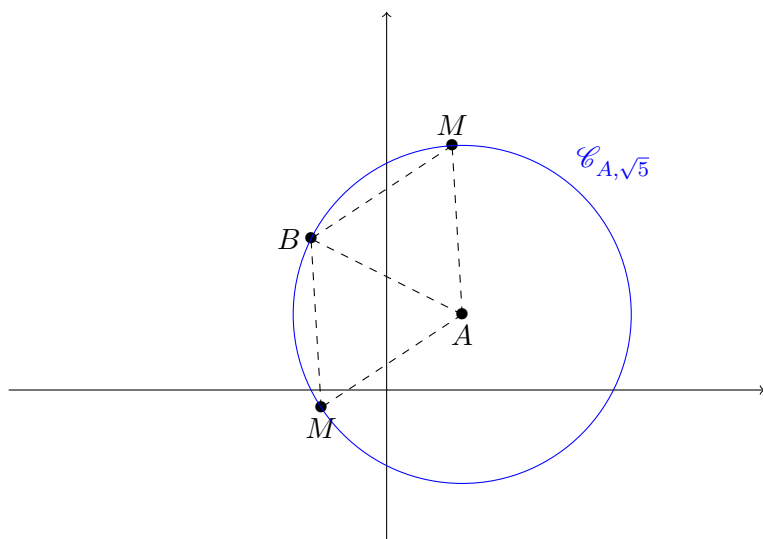
$$\iff z - z_A = e^{\pm i \frac{\pi}{3}} (z_B - z_A)$$

$$\iff z = z_A + \left(\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (z_B - z_A)$$

$$\iff z = 1+i + \left(\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (-2+i)$$

$$\iff z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \left(\frac{3}{2} - \sqrt{3} \right) \text{ ou } z = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3} \right)$$

Conclusion : Le triangle ABM est équilatéral si et seulement si M a pour coordonnées $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} - \sqrt{3}\right)$ ou $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)$.



2.

$$ABM \text{ rectangle isocèle en } A \iff AM = AB \text{ et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \pm \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

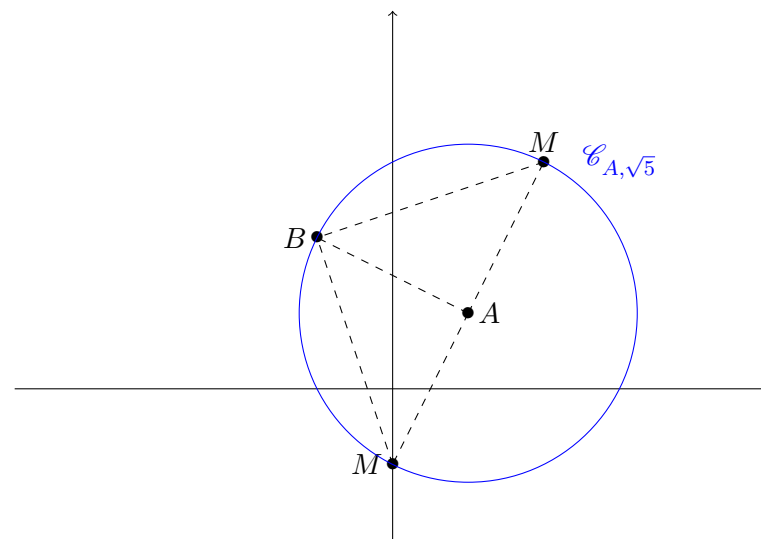
$$\iff z - z_A = e^{\pm i \frac{\pi}{2}} (z_B - z_A)$$

$$\iff z = z_A \pm i(z_B - z_A)$$

$$\iff z = 1+i \pm i(-2+i)$$

$$\iff z = -i \text{ ou } z = 2+3i.$$

Conclusion : Le triangle ABM est rectangle isocèle en A si et seulement si M a pour coordonnées $(0, -1)$ ou $(2, 3)$.



Exercice 18. Déterminer et représenter l'ensemble points M d'affixe z tels que :

1. $|z - 2i| = 3$

2. $|z + 3 + i| \leq 2$

3. $\arg(z - i) = \frac{\pi}{6}$

4. $\frac{|z - 3|}{|z - 5|} = 1$

Exercice 19. Déterminer l'expression des transformations suivantes :

1. f_1 la translation de vecteur \vec{V} d'affixe $2 - 3i$.
 $z' = z + 2 - 3i$.
2. f_2 la rotation de centre A d'affixe $1 + i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$
 $z' - (1 + i) = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - (1 + i))$, c'est-à-dire $z' = iz + 2$.
3. f_3 l'homothétie de centre A d'affixe $1 + i$ et de rapport $\sqrt{2}$.
 $z' - (1 + i) = \sqrt{2}(z - (1 + i))$, c'est-à-dire $z' = \sqrt{2}z + (1 - \sqrt{2})(1 + i)$.

Exercice 20. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f dans les cas suivants :

1. $f(z) = z - 1 - i$
2. $f(z) = \frac{1}{2}z - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. $f(z) = \sqrt{3}z$
4. $f(z) = iz - 3i + 3$

1. On étudie la transformation f qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' avec $z' = z - 1 - i$.

f n'admet pas de point fixe. Il s'agit de la translation de vecteur \vec{V} d'affixe $-1 - i$.

2. On étudie la transformation f qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' avec $z' = \frac{1}{2}z - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Recherche point fixe :

$$\begin{aligned} z = \frac{1}{2}z - i\frac{\sqrt{3}}{2} &\iff \frac{1}{2}z = -i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\iff z = -i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

f est l'homothétie de centre $A(-i\sqrt{3})$ et de rapport $\lambda = \frac{1}{2}$:

$$z' - (-i\sqrt{3}) = \frac{1}{2}(z - (-i\sqrt{3})).$$

3. On étudie la transformation f qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' avec $z' = \sqrt{3}z$.

f est l'homothétie de centre $O(0)$ et de rapport $\lambda = \sqrt{3}$.

4. On étudie la transformation f qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' avec $z' = iz - 3i + 3$.

Recherche point fixe :

$$\begin{aligned} z = iz - 3i + 3 &\iff (1 - i)z = 3(1 - i) \\ &\iff z = 3. \end{aligned}$$

f est la rotation de centre A d'affixe 3 et d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$z' - 3 = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 3).$$