

Feuille d'exercices n°7 – Correction

Les systèmes linéaires

Exercice 1. 1. Résoudre les systèmes suivants d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(a) \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x + 2z = 1 \\ -y + z = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y - z = 11 \\ 2x + 5y - 5z = 13 \\ x + 4y + z = 18 \end{cases}$$

2. Résoudre les systèmes suivants d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4$:

$$(a) \begin{cases} 2x - y + z + t = 0 \\ 3x - y + 2z + t = 1 \\ 4x - y + z + 2t = 4 \\ 6x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x + y + z - 3t = 1 \\ 2x + y - z + t = -1 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x + 3y + 3t = 3 \\ 3x - y - t = 1 \end{cases}$$

Correction.

1. (a)

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & -6 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$(a) \iff \begin{cases} \boxed{x} = 3 - y - 2z \\ \boxed{y} = -2 + z \\ \boxed{z} = 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{x} = -1 \\ \boxed{y} = 0 \\ \boxed{z} = 2 \end{cases}$$

Conclusion : L'ensemble des solutions du système (a) est $\{(-1, 0, 2)\}$.

(b)

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) &\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} = 1 - 2z \\ \boxed{y} = -2 + z \\ \boxed{z} = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} = -1 \\ \boxed{y} = -1 \\ \boxed{z} = 1 \end{cases} . \end{aligned}$$

Conclusion : L'ensemble des solutions du système (b) est $\{(-1, -1, 1)\}$.

(c)

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 11 \\ 2 & 5 & -5 & 13 \\ 1 & 4 & 1 & 18 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 14 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 7 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c) &\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} = 4 - 2y + 3z \\ \boxed{y} = 7 - 2z \\ \boxed{z} = 2 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} = 4 \\ \boxed{y} = 3 \\ \boxed{z} = 2 \\ 0 = 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

Conclusion : L'ensemble des solutions du système (c) est $\{(4, 3, 2)\}$.

2. (a)

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 6 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & \boxed{1} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 8 & -2 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
 &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & \boxed{1} & 0 \\ 1 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 6 & -2 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \\
 &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & \boxed{1} & 0 \\ 1 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \\
 &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & \boxed{1} & 0 \\ 1 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \\
 &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & \boxed{1} & 0 \\ 1 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 5 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

$$(a) \iff \begin{cases} \boxed{x} = 1 \\ \boxed{y} = 5 - x \\ \boxed{z} = 1 - x \\ \boxed{t} = -2x + y - z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{x} = 1 \\ \boxed{y} = 4 \\ \boxed{z} = 0 \\ \boxed{t} = 2 \end{cases}.$$

Conclusion : L'ensemble des solutions du système (a) est $\{(1, 4, 0, 2)\}$.

(b)

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 7 & -3 \end{array} \right) \\
 &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & -7 & 3 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

$$(b) \iff \begin{cases} \boxed{x} = -2 + 2z - 4t \\ \boxed{y} = 3 - 3z + 7t \\ z = z \\ t = t \end{cases}, \quad (z, t) \in \mathbb{C}^2.$$

Conclusion : L'ensemble des solutions du système (b) est

$$\{(-2 + 2z - 4t, 3 - 3z + 7t, z, t) \mid (z, t) \in \mathbb{C}^2\}.$$

(c)

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -10 & 0 & -10 & -8 \end{array} \right) \\
 &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & \frac{4}{5} \end{array} \right) \\
 &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & \frac{4}{5} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

$$(c) \iff \begin{cases} \boxed{x} = \frac{3}{5} \\ \boxed{y} = \frac{4}{5} - t \\ z = z \\ t = t \end{cases}, \quad (z, t) \in \mathbb{C}^2.$$

Conclusion : L'ensemble des solutions du système (b) est

$$\left\{ \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} - t, z, t \right) \mid (z, t) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

Exercice 2. Soit $m \in \mathbb{R}$.

1. Résoudre le système suivant d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$(S) \begin{cases} x + my = -3 \\ mx + 4y = 6 \end{cases} .$$

Interpréter géométriquement le résultat.

2. Résoudre le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ x - 2y + 2z = m \\ x + y - z = 1 \end{cases} .$$

Correction.

1. On note (S) le système considéré et \mathcal{S} son ensemble de solutions.

$$\det(S) = \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 4 \end{vmatrix} = 4 - m^2 = (2 - m)(2 + m)$$

Si $m = 2$, alors

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + 2y = -3 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + 2y = -3 \\ 0 = 12 \end{cases}$$

et $\mathcal{S} = \emptyset$.

Si $m = -2$, alors

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} - 2y = -3 \\ -2x + 4y = 6 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} - 2y = -3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

et $\mathcal{S} = \{(2y - 3, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

Si $m \neq -2$ et $m \neq 2$, alors

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + my = -3 \\ (4 - m^2)\boxed{y} = 6 + 3m \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} = -3 - my \\ \boxed{y} = \frac{3}{2 - m} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} = -\frac{6}{2 - m} \\ \boxed{y} = \frac{3}{2 - m} \end{cases}$$

et $\mathcal{S} = \left\{ \left(-\frac{6}{2 - m}, \frac{3}{2 - m} \right) \right\}$.

Conclusion :

- Si $m = 2$, alors $\mathcal{S} = \emptyset$.
(intersection de deux droites parallèles et distinctes du plan)
- Si $m \neq -2$, alors $\mathcal{S} = \{(2y - 3, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.
(intersection de deux droites parallèles et confondues du plan)
- Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, alors $\mathcal{S} = \left\{ \left(-\frac{6}{2 - m}, \frac{3}{2 - m} \right) \right\}$.
(intersection de deux droites non parallèles du plan)

2. On note (S) le système considéré et \mathcal{S} son ensemble de solutions.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & m \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & m \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \\ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & m - 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{array} \right) \\ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1 - m}{3} \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \\ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & \frac{1 - m}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{m + 2}{3} \end{array} \right)$$

$$(S) \iff \begin{cases} \boxed{x} + y - z = 1 \\ \boxed{y} - z = \frac{1-m}{3} \\ 0 = m + 2 \end{cases} .$$

Conclusion :

- Si $m \neq -2$, $\mathcal{S} = \emptyset$.
- Si $m = -2$, $\mathcal{S} = \{(0, 1 + z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 3. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre les systèmes paramétrés suivants d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$1. \begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + 4z = a \end{cases} \quad \left| \quad 3. \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + y + z = a \\ x - 2y - z = b \\ -x + 11y + 7z = 0 \end{cases}$$

Correction.

1. On note (S) le système considéré et \mathcal{S} son ensemble de solutions.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & a \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -2 \\ 0 & -7 & 1 & a-3 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 10 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Conclusion :

- Si $a \neq 1$, $\mathcal{S} = \emptyset$.

- Si $a = 1$, $\mathcal{S} = \{(3 - 10y, y, -2 + 7y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

2. On note (S) le système considéré et \mathcal{S} son ensemble de solutions.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -2 & -1 & b \\ -1 & 11 & 7 & 0 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & a \\ 0 & -3 & -2 & b-a \\ 0 & 12 & 8 & a \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & a \\ 0 & \boxed{3} & 2 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & 4b-3a \end{array} \right) \end{aligned}$$

Conclusion :

- Si $4b - 3a \neq 0$, alors $\mathcal{S} = \emptyset$.
- Si $b = \frac{3a}{4}$, alors $\mathcal{S} = \{(\frac{11a}{12} - \frac{1}{3}z, \frac{a}{12} - \frac{2}{3}z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

3. On note (S) le système considéré et \mathcal{S} son ensemble de solutions.

$$\det(S) = (a + 2)(a - 1)^2$$

Si $a = 1$, alors

$$(S) \iff \begin{cases} \boxed{x} + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} \boxed{x} + y + z = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = -1 \end{cases}$$

et $\mathcal{S} = \emptyset$.

Si $a \neq -2$, alors

$$\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_1 + L_2} \begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ 0 = -1 \end{cases}$$

et $\mathcal{S} = \emptyset$.

Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 0 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & \boxed{1} & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 & a-1 \\ 1-a^2 & 1-a & 0 & -a \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & \boxed{1} & 1 \\ & 1-a & \boxed{a-1} & a-1 \\ \boxed{2-a-a^2} & & 0 & -1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Comme $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$, $a-1 \neq 0$ et $(2-a-a^2) = -(a-1)(a+2) \neq 0$.

$$\begin{aligned} (S) &\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} = \frac{1}{a^2+a-2} \\ \boxed{y} = 1+x \\ \boxed{z} = 1-ax-y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} = \frac{1}{a^2+a-2} \\ \boxed{y} = \frac{a^2+a-1}{a^2+a-2} \\ \boxed{z} = -\frac{a+1}{a^2+a-2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{et } \mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{1}{a^2+a-2}, \frac{a^2+a-1}{a^2+a-2}, -\frac{a+1}{a^2+a-2} \right) \right\}.$$

Conclusion :

— Si $a \in \{-2, 1\}$, alors $\mathcal{S} = \emptyset$.

— Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$, alors

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{1}{a^2+a-2}, \frac{a^2+a-1}{a^2+a-2}, -\frac{a+1}{a^2+a-2} \right) \right\}.$$

Exercice 4. Discuter, suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{C}$, le nombre de solutions du système suivant, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$:

$$\begin{cases} x - my + m^2z = m \\ mx - m^2y + mz = 1 \\ mx + y - m^3z = -1 \end{cases}.$$

Correction.

On note (S) le système considéré et \mathcal{S} son ensemble de solution.

$$\begin{aligned} \det(S) &= \begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & 1 & -m^3 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\text{Sarrus}}{=} m^5 - m^3 + m^3 + m^5 - m - m^5 \\ &= m^5 - 1 \\ &= m(m^4 - 1) \\ &= m(m^2 - 1)(m^2 + 1) \\ &= m(m-1)(m+1)(m-i)(m+i). \end{aligned}$$

— Si $m \notin \{0, 1, -1, i, -i\}$, alors $\det(S) \neq 0$ et le système (S) admet une unique solution.

— Si $m = 0$, alors

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

et (S) n'admet aucune solution.

— Si $m = 1$, alors

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ x + y - z = -1 \end{cases}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -2 & -2 \end{array} \right)$$

et (S) admet une infinité de solutions.

— Si $m = -1$, alors

$$(S) \iff \begin{cases} x + y + z = -1 \\ -x - y - z = 1 \\ -x + y + z = -1 \end{cases}$$

$$\iff \boxed{x} + y + z = -1$$

et (S) admet une infinité de solutions.

— Si $m = i$, alors

$$(S) \iff \begin{cases} x - iy - z = i \\ ix + y + iz = 1 \\ ix + y + iz = -1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & -1 & | & i \\ i & 1 & i & | & 1 \\ i & 1 & i & | & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & -i & -1 & | & i \\ 0 & 0 & \boxed{2i} & | & 2 \\ 0 & 0 & 2i & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & -i & -1 & | & i \\ 0 & 0 & \boxed{2i} & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & -2 \end{pmatrix}$$

et (S) n'admet aucune solution.

— Si $m = -i$, alors

$$\begin{pmatrix} 1 & i & -1 & | & -i \\ -i & 1 & -i & | & 1 \\ -i & 1 & -i & | & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & i & -1 & | & -i \\ 0 & 0 & \boxed{-2i} & | & 2 \\ 0 & 0 & -2i & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & i & -1 & | & -i \\ 0 & 0 & \boxed{-2i} & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & -2 \end{pmatrix}$$

et (S) n'admet aucune solution.

Conclusion :

Si $m \notin \{0, -1, 1, -i, i\}$,
alors (S) admet une unique solution ;
Si $m \in \{0, i, -i\}$,
alors (S) n'admet aucune solution ;
Si $m \in \{-1, 1\}$,
alors (S) admet une infinité de solution.

- Exercice 5.** 1. Déterminer l'ensemble des polynômes P de degré 2 tels que $P(1) = 1$, $P'(1) = 1$ et $P(-1) = 0$.
2. Déterminer l'ensemble des polynômes P de degré 3 tels que $P(-1) = 1$, $P(1) = 0$ et $P(2) = 1$.

Correction.

1. Soit P un polynôme de degré 2, alors il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P(x) = ax^2 + bx + c$. On est amené à résoudre dans $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ le système

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 2a + b = 1 \\ a - b + c = 0 \end{cases} .$$

Réponse :

Il existe un polynôme de degré 2 satisfaisant ces trois conditions : $P(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$.

2. Soit P un polynôme de degré 3, alors il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. On est amené à résoudre dans $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ le système

$$\begin{cases} -a + b - c + d = 1 \\ a + b + c + d = 0 \\ 8a + 4b + 2c + d = 1 \end{cases} .$$

Réponse :

Il existe une infinité de polynômes de degré 3 satisfaisant ces trois conditions :
 $P(x) = (1 + \frac{d}{2})x^3 + (\frac{1}{2} - d)x^2 - (\frac{1}{2} + \frac{d}{2})x + d$ avec $d \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. Résoudre le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$:

$$\begin{cases} x^3 y^2 z^6 = 1 \\ x^4 y^5 z^{12} = 2 \\ x^2 y^2 z^5 = 3 \end{cases} .$$

Correction.

Soit $(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$. On a

$$\begin{aligned} (S) &\iff \begin{cases} \ln(x^3 y^2 z^6) = \ln 1 \\ \ln(x^4 y^5 z^{12}) = \ln 2 \\ \ln(x^2 y^2 z^5) = \ln 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3 \ln x + 2 \ln y + 6 \ln z = \ln 1 \\ 4 \ln x + 5 \ln y + 12 \ln z = \ln 2 \\ 2 \ln x + 2 \ln y + 5 \ln z = \ln 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3X + 2Y + 6Z = \ln 1 \\ 4X + 5Y + 12Z = \ln 2 \\ 2X + 2Y + 5Z = \ln 3 \end{cases} \text{ où } \begin{cases} X = \ln x \\ Y = \ln y \\ Z = \ln z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} X = 6 \ln 3 - 2 \ln 2 \\ Y = 12 \ln 3 - 3 \ln 2 \\ Z = 2 \ln 2 - 7 \ln 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \ln x = 6 \ln 3 - 2 \ln 2 \\ \ln y = 12 \ln 3 - 3 \ln 2 \\ \ln z = 2 \ln 2 - 7 \ln 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \exp(6 \ln 3 - 2 \ln 2) \\ y = \exp(12 \ln 3 - 3 \ln 2) \\ z = \exp(2 \ln 2 - 7 \ln 3) \end{cases} \\ &\iff (x, y, z) = \left(\frac{3^6}{2^2}, \frac{3^{12}}{2^3}, \frac{2^2}{3^7} \right). \end{aligned}$$

Donc (S) admet une unique solution $\left(\frac{3^6}{2^2}, \frac{3^{12}}{2^3}, \frac{2^2}{3^7} \right)$.