Feuille d'exercices n°9 – Correction
Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

Représentation graphique

Exercice 1. Étudier les fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sin^2(x)$
2. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$
5. $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$
6. $f(x) = \dfrac{1}{1-2\ln|x|}$

Composée

Exercice 2. 1. Écrire les fonctions suivantes comme la composée de deux fonctions :

(a) $f(x) = (x-3)^2$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (c) $f(x) = \ln(\cos(x))$

(d) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+e^x}$

2. Déterminer l'expression de $g \circ f$, son domaine de définition, ainsi que sa dérivée, lorsque :

(a) $f : x \to \sqrt{x}$ et $g : x \to x^2$;
(b) $f : x \to x^2$ et $g : x \to \sqrt{x}$;
(c) $f : x \to 2x+1$ et $g : x \to x^3$;
(d) $f : x \to \sin x$ et $g : x \to \frac{1}{x}$.

3. Soient

$$f : \begin{array}{ccc}]-\infty, 3] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2+\sqrt{3-x} \end{array}$$

et

$$g : \begin{array}{ccc} [2; +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x^2+4x-1 \end{array}.$$

A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Correction.

1. (a) $f(x) = (x-3)^2 = u \circ v(x)$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = x-3$.

1. (b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} = u \circ v(x)$ avec $u(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

1. (c) $f(x) = \ln(\cos(x)) = u \circ v(x)$ avec $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = \cos(x)$.

1. (d) $f(x) = \dfrac{(e^x)^2}{1+e^x} = u \circ v(x)$ avec $u(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$ et $v(x) = e^x$.

2. (a) $g \circ f(x) = (\sqrt{x})^2 = x$, $D_{g\circ f} =]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$, $(g \circ f)'(x) = 1$.

2. (b) $g \circ f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$, $D_{g\circ f} = \mathbb{R}$, $g \circ f$ n'est pas dérivable en 0 et pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, $(g \circ f)'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

2. (c) $g \circ f(x) = (2x+1)^3$, $D_{g\circ f} = \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(g \circ f)'(x) = 6(2x+1)^2$.

2. (d) $g \circ f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$, $D_{g\circ f} = \mathbb{R} \setminus \{\text{zéros du sin}\} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, et pour tout $x \in D_{g\circ f}$, $(g \circ f)'(x) = -\dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$.

3. On a $\begin{array}{cccc} f \circ g : & [2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x \end{array}$ et $\begin{array}{cccc} g \circ f : &]-\infty,3] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x \end{array}$. Ainsi $f \circ g \neq g \circ f$.

Parité, périodicité et monotonie

Exercice 3. Soient $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Étudier la parité éventuelle de $g \circ f$ selon les parités de f et de g.
2. On suppose que f et g sont strictement monotones sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que si f et g ont le même sens de variation, alors $g \circ f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que si f et g n'ont pas le même sens de variation, alors $g \circ f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que f s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Correction.

1. Si f est paire, alors quelle que soit $g \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $g \circ f$ est paire :
En effet, soit $x \in \mathbb{R}$, $g \circ f(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = g \circ f(x)$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g \circ f(-x) = g \circ f(x)$ et $g \circ f$ est paire.

Si f est impaire et g est paire, alors $g \circ f$ est paire :
En effet, soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g \circ f(-x) &= g(f(-x)) \\ &= g(-f(x)) && \text{(car } f \text{ est impaire)} \\ &= g(f(x)) && \text{(car } g \text{ est paire)} \\ &= g \circ f(x). \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g \circ f(-x) = g \circ f(x)$ et $g \circ f$ est paire.

Si f et g sont impaires, alors $g \circ f$ est impaire :

En effet, soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g \circ f(-x) &= g(f(-x)) \\ &= g(-f(x)) && \text{(car } f \text{ est impaire)} \\ &= -g(f(x)) && \text{(car } g \text{ est impaire)} \\ &= -g \circ f(x). \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g \circ f(-x) = -g \circ f(x)$ et $g \circ f$ est impaire.

2 (a) Supposons que f et g sont strictement décroissantes. Soient x et y des réels,

$$\begin{aligned} x < y &\Longrightarrow f(x) > f(y) && \text{(car } f \text{ est strictement décroissante)} \\ &\Longrightarrow g(f(x)) < g(f(y)) && \text{(car } g \text{ est strictement décroissante)} \\ &\Longrightarrow g \circ f(x) < g \circ f(y) \end{aligned}$$

$g \circ f$ est donc strictement croissante.
Démonstration similaire lorsque f et g sont strictement croissantes.

2 (b) Supposon que f est strictement croissante et que g est strictement décroissante. Soient x et y des réels,

$$\begin{aligned} x < y &\Longrightarrow f(x) < f(y) && \text{(car } f \text{ est strictement croissante)} \\ &\Longrightarrow g(f(x)) > g(f(y)) && \text{(car } g \text{ est strictement décroissante)} \\ &\Longrightarrow g \circ f(x) > g \circ f(y) \end{aligned}$$

$g \circ f$ est donc strictement décroissante.

Démonstration similaire lorsque f est strictement décroissante et g sont strictement décroissante.

3. Démonstration par analyse synthèse.

Analyse : Soient $f_P(x)$ une fonction paire et $f_I(x)$ une fonction impaire telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_P(x) + f_I(x) = f(x) \quad (1)$$

Alors

$$f_P(-x) + f_I(-x) = f(-x)$$

donc

$$f_P(x) - f_I(x) = f(-x) \quad (2)$$

Ainsi

$$\begin{cases} f_P(x) + f_I(x) = f(x) & (1) \\ f_P(x) - f_I(x) = f(-x) & (2) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} 2f_P(x) = f(x) + f(-x) & (1)+(2) \\ 2f_I(x) = f(x) - f(-x) & (1)-(2) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} f_P(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} \\ f_I(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2} \end{cases}.$$

Synthèse : On a bien

$$f_P(x) + f_I(x) = f(x)$$

avec

$$\begin{cases} f_P(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} \\ f_I(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2} \end{cases}.$$

On vérifie que f_P est bien une fonction paire ($f_P(-x) = f_P(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) et que f_I est bien une fonction impaire ($f_I(-x) = -f_I(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

Conclusion : f s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Limites

Exercice 4. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x + \cos x$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sin x}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\lfloor x\rfloor}{x}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \lfloor x\rfloor$

Correction.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \cos(x) \geqslant x - 1$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x + \cos(x) = +\infty$ par comparaison.

2. Pour tout $x > 0$,
$$-\frac{1}{x} \leqslant \frac{\cos(x)}{x} \leqslant \frac{1}{x}.$$
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(x)}{x} = 0$ par encadrement.

3. Pour tout $x < 0$,
$$-\frac{1}{x} \geqslant \frac{\sin(x)}{x} \geqslant \frac{1}{x}.$$
Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0$ par encadrement.

4. Pour tout $x > 0$,
$$\frac{x-1}{x} < \frac{\lfloor x\rfloor}{x} \leqslant \frac{x}{x}.$$
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x} = 1$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\lfloor x\rfloor}{x} = 1$ par encadrement.

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\lfloor x\rfloor > x - 1.$$
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \lfloor x\rfloor = +\infty$ par comparaison.

Exercice 5. 1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction

$$f(x) = \ln x - 2\sqrt{x}$$

et étudier ses variations.

2. Démontrer que pour tout $x \geqslant 1$, $0 \leqslant \dfrac{\ln x}{x} \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ et en déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$.

Correction.

1. $D_f =]0, +\infty[$

f est dérivable sur D_f et pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1-\sqrt{x}}{x}$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\ln(2)-2$	$\searrow$	$-\infty$

2. On souhaite dans cette question retrouver la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}$ sans faire appel aux croissances comparées.

Pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\ln(x) \geqslant \ln(1)$ et $x > 0$. Ainsi $\dfrac{\ln(x)}{x} \geqslant 0$ pour tout $x \in [1, +\infty[$.

D'après $Q1$, pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\ln(x) - 2\sqrt{x} \leqslant \ln(2) - 2 \leqslant 0$, donc $\ln(x) \leqslant 2\sqrt{x}$, donc $\dfrac{\ln(x)}{x} \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ pour tout $x \in [1, +\infty[$.

Ainsi pour tout $x \in [1, +\infty[$, $0 \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x} \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

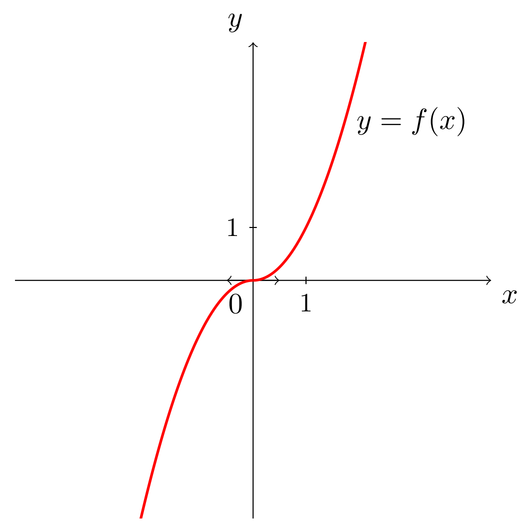
Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par encadrement.

Dérivation

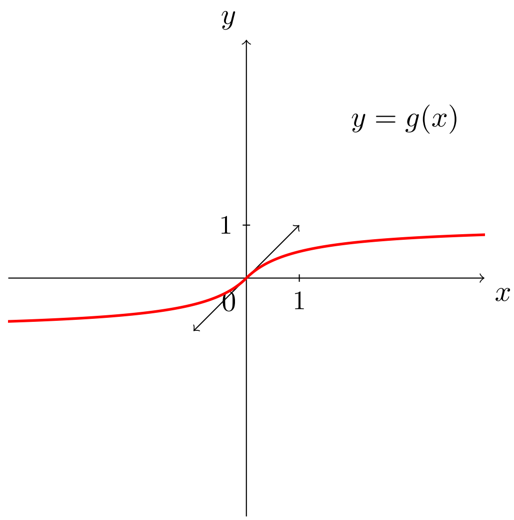
Exercice 6. Sur quelles parties de $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes sont-elles continues, dérivables ?

$$f(x) = x|x| \quad , \quad g(x) = \frac{x}{|x|+1} \quad , \quad h(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

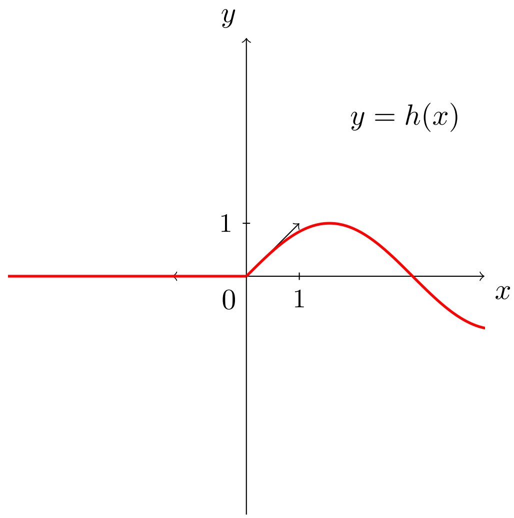
Correction.



La fonction f est continue et dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.



La fonction g est continue et dérivable en 0 et $g'(0) = 1$.



La fonction h est continue en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0.

Exercice 7. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad f(x) = ax^2 + bx + 1 \quad \text{si } x > 1$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Correction.

f est continue et dérivable sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f \text{ est continue en } 1 &\iff \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \\ &\iff \lim_{x\to 1^+} ax^2 + bx + 1 = \sqrt{1} \\ &\iff a + b + 1 = 1 \\ &\iff a + b = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \text{ est dérivable en } 1 &\iff \begin{cases} f \text{ est continue en } 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a + b = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 1^+} 2ax + b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + b = \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion : f est dérivable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -\dfrac{1}{2}$.

Exercice 8. 1. Montrer que :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

2. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to 3} \frac{\ln(x^2 - 3x + 1)}{x - 3} \quad ; \quad \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1}.$$

Correction.

Rappel : Si f est dérivable en a alors $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$.

1. • La fonction $f : x \mapsto \sin(x)$ est dérivable en 0 et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}=\cos(0)$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$.

• La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable en 0 $\left(f'(x)=\dfrac{1}{1+x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{x-0}=\dfrac{1}{1+0}$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

• La fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est dérivable en 0 et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^0}{x-0}=\mathrm{e}^0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1$.

2. • La fonction $f : x \mapsto \tan(x)$ est dérivable en 0 $\left(f'(x)=1+\tan^2(x)\right)$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(x)-\tan(0)}{x-0}=1+\tan^2(0)$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(x)}{x}=1$.

• La fonction $f : x \mapsto \ln\left(x^2-3x+1\right)$ est dérivable en 3 $\left(f'(x)=\dfrac{2x-3}{x^2-3x+1}\right)$ et $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln\left(x^2-3x+1\right)-\ln(1)}{x-3}=3$.

• La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+3}$ est dérivable en 1 $\left(f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}\right)$ et $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\dfrac{1}{4}$.

Exercice 9. Montrer que :

1. $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geqslant x+1$.
2. $\forall x\in\mathbb{R}^{+\star},\ \ln(x)\leqslant x-1$.

Correction.

1. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{e}^x\geqslant x+1$ est équivalent à montrer que $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{e}^x-x-1\geqslant 0$.

On pose $f(x)=\mathrm{e}^x-x-1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=\mathrm{e}^x-1$.

$$\begin{aligned} f'(x)=0 &\iff \mathrm{e}^x-1=0\\ &\iff \mathrm{e}^x=1\\ &\iff x=0. \end{aligned}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Ce tableau de variations assure que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\geqslant 0$, c'est-à-dire $\mathrm{e}^x\geqslant x+1$.

2. Montrer $\forall x\in\mathbb{R}^{+\star},\ \ln(x)\leqslant x-1$ est équivalent $\forall x\in\mathbb{R}^{+\star},\ 0\leqslant x-1-\ln(x)$.

On pose $g(x)=x-1-\ln(x)$ pour tout $x\in]0,+\infty[$. g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x\in]0,+\infty[$, $g'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$.

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
x	0	$+$		$+$	
$g'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Ce tableau de variations assure que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $g(x) \geqslant 0$,c'est-à-dire $\ln(x) \leqslant x-1$.

Injection, surjection, bijection

Exercice 10. Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x \end{array}$
2. $g: \begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \cos x \end{array}$
3. $h: \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \to & [0,+\infty[\\ x & \mapsto & x^2-1 \end{array}$.

Correction.

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est injective, mais pas surjective (0 n'admet pas d'antécédent par f). Elle n'est donc pas bijective.

Remarque : La fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]0,+\infty[\\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x \end{array}$ est bijective.

2. g est surjective, g n'est pas injective car 0 admet deux antécédents : $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. La fonction g n'est donc pas bijective.

3. La fonction h est injective et surjective, elle est donc bijective.

Exercice 11. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1} :

1. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x+1 \end{array}$
2. $f: \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \frac{2x}{1+x^2} \end{array}$
3. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ x & \mapsto & \frac{x+1}{x-1} \end{array}$.

Correction.

1.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est continue et strictement croissante, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est donc bijective d'après le théorème de la bijection.

Rappel : $f(x)=y \iff x=f^{-1}(y)$.

$$\begin{aligned} f(x)=y &\iff 2x+1=y \\ &\iff 2x=y-1 \\ &\iff x=\frac{y-1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi $f^{-1}(y) = \dfrac{y-1}{2}$.

Conclusion : $f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x-1}{2} \end{array}$.

2. $f'(x) = \dfrac{2(1+x^2) - 2x \times (2x)}{(1+x^2)^2} = 2\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$.

x	-1	1
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	-1 $\searrow$	1

$f : [-1,1] \to [-1,1]$ est continue et strictement croissante, $f : [-1,1] \to [-1,1]$ est donc bijective d'après le théorème de la bijection.

Rappel : $f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$.

Soient $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$ et $y \in [-1,1] \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{2x}{1+x^2} = y \\ &\iff 2x = y + yx^2 \\ &\iff yx^2 - 2x + y = 0 \\ &\iff x = \frac{2-\sqrt{4-4y^2}}{2y} \text{ ou } x = \frac{2+\sqrt{4-4y^2}}{2y} \\ &\iff x = \frac{1}{y}\left(1-\sqrt{1-y^2}\right) \text{ ou } x = \frac{1}{y}\left(1+\sqrt{1-y^2}\right) \\ &\iff x = \underbrace{\frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}}}_{\in[-1,1]} \text{ ou } x = \underbrace{\frac{1}{y}\left(1+\sqrt{1-y^2}\right)}_{\notin[-1,1]} \qquad \# \times \frac{1+\sqrt{1-}}{1+\sqrt{1-}} \\ &\iff x = \frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}} \qquad \text{car } x \in [-1, \end{aligned}$$

Ainsi $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{1+\sqrt{1-y^2}}$.

Conclusion : $f^{-1} : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} \end{array}$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\Vert$	$-$
$f(x)$	1 $\searrow$ $-\infty$	$\Vert$	$+\infty$ $\searrow$ 1

f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty, 1[$ à valeurs dans $]-\infty, 1[$, f réalise donc une bijection de $]-\infty, 1[$ sur $]-\infty, 1[$.

De même, en appliquant une seconde fois le théorème de la bijection, on montre que f réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur $]1,+\infty[$. Ainsi $f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}\setminus\{1\}$ est bijective.

Rappel : $f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$.

Soient $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ et $y \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{x+1}{x-1} = y \\ &\iff x+1 = y(x-1) \\ &\iff 1+y = yx - x \\ &\iff 1+y = (y-1)x \\ &\iff x = \frac{1+y}{y-1}. \end{aligned}$$

Ainsi $f^{-1}(y) = \dfrac{1+y}{y-1}$.

Conclusion : $\begin{array}{rccc} f^{-1} : & \mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1+x}{x-1} \end{array}$.

Partie entière

Exercice 12. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\lfloor 3x+2 \rfloor = 5$ 2. $\lfloor x^2-2x+2 \rfloor = 2$.

Correction.

1.

$$\begin{aligned} \lfloor 3x+2 \rfloor = 5 &\iff 5 \leqslant 3x+2 < 6 \\ &\iff 3 \leqslant 3x < 4 \\ &\iff 1 \leqslant x < \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Conclusion : L'ensemble des solutions est $\left[1, \dfrac{4}{3}\right[$.

2.

$$\begin{aligned} \lfloor x^2-2x+2 \rfloor = 2 &\iff 2 \leqslant x^2-2x+2 < 3 \\ &\iff \begin{cases} x^2-2x \geqslant 0 \\ x^2-2x-1 < 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 2 \\ x \in \left]1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right[\end{cases} \\ &\iff x \in \left]1-\sqrt{2}, 0\right] \cup \left[2, 1+\sqrt{2}\right[. \end{aligned}$$

Conclusion : L'ensemble des solutions est $\left]1-\sqrt{2}, 0\right] \cup \left[2, 1+\sqrt{2}\right[$.

Exercice 13. Montrer que :

1. la fonction partie entière est croissante ;
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$;
3. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Correction.

1. La fonction partie entière est croissante signifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\text{si } x \leqslant y, \text{ alors } \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor.$$

Démonstration : Soient x et y deux réels tels que $x \leqslant y$. Par définition,

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant y < \lfloor y \rfloor + 1.$$

Donc

$$\lfloor x \rfloor < \lfloor y \rfloor + 1,$$

Comme il s'agit d'entiers, on a

$$\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition,

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Donc

$$\underbrace{\lfloor x \rfloor + 1}_{\in \mathbb{Z}} \leqslant x + 1 < \underbrace{\lfloor x \rfloor + 1}_{\in \mathbb{Z}} + 1.$$

Or $\lfloor x + 1 \rfloor$ est l'unique entier tel que

$$\lfloor x + 1 \rfloor \leqslant x + 1 < \lfloor x + 1 \rfloor + 1.$$

Ainsi

$$\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$$

par unicité.

Conclusion : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.

3. Soient x et y deux réels. Par définition,

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \quad \text{et} \quad \lfloor y \rfloor \leqslant y < \lfloor y \rfloor + 1.$$

Or

$$x + y - 1 < \lfloor x + y \rfloor \leqslant x + y,$$

donc

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor - 1 \leqslant x + y - 1 < \lfloor x + y \rfloor \leqslant x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2,$$

ainsi

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor - 1 < \lfloor x + y \rfloor < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2.$$

Comme il s'agit d'entiers, on a

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

Fonctions arcsin, arccos et arctan

Exercice 14.

1. $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ 2. $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{7\pi}{5}\right)\right)$ 3. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{21\pi}{4}\right)\right)$
4. $\arccos\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right)$ 5. $\arccos\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ 6. $\arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
7. $\arctan\left(\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ 8. $\arctan\left(\tan\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right)$ 9. $\arctan\left(\tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

Correction.

Indication : Représenter les angles mis en jeu (et leur sinus) sur un cercle trigonométrique et se rappeler que $\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\arccos(x) \in [0, \pi]$ et $\arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

1. $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\pi}{4}$ car $-\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

2. $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{7\pi}{5}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\pi - \frac{3\pi}{5}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right) = \dfrac{2\pi}{5}$ car $\dfrac{2\pi}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

3. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{21\pi}{4}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(5\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

4. $\arccos\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$ car $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$.

5. $\arccos\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \dfrac{3\pi}{4}$ car $\dfrac{3\pi}{4} \in [0, \pi]$.

6. $\arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \dfrac{2\pi}{3}$ car $\dfrac{2\pi}{3} \in [0, \pi]$.

7. $\arctan\left(\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = -\dfrac{\pi}{4}$ car $-\dfrac{\pi}{4} \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

8. $\arctan\left(\tan\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = -\dfrac{\pi}{6}$ car $-\dfrac{\pi}{6} \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

9. $\arctan\left(\tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \dfrac{\pi}{4}$ car $\dfrac{\pi}{4} \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 15. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $\sin(x) = -\frac{1}{3}$ 2. $\cos(x) = \frac{1}{5}$ 3. $\tan(4x) = \frac{2}{3}$ 4. $\sin(x+3) = \frac{3}{5}$

Correction.

1.

$$\sin(x) = -\tfrac{1}{3}$$
$$\iff x = \arcsin\left(-\tfrac{1}{3}\right) + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \arcsin\left(-\tfrac{1}{3}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$\iff x = -\arcsin\left(\tfrac{1}{3}\right) + 2k\pi \text{ ou } x = \pi + \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2.

$$\cos(x) = \tfrac{1}{5}$$
$$\iff x = \arccos\left(\frac{1}{5}\right) + 2k\pi \text{ ou } x = -\arccos\left(\frac{1}{5}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3.

$$\begin{aligned}\tan(4x) = \frac{2}{3} &\iff 4x = \arctan\left(\frac{2}{3}\right) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\\ &\iff x = \frac{1}{4}\arctan\left(\frac{2}{3}\right) + k\frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

4.

$$\sin(x+3) = \frac{3}{5}$$
$$\iff x + 3 = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) + 2k\pi \text{ ou } x + 3 = \pi - \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$\iff x = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) - 3 + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) - 3 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 16. 1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

2. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Correction.

1. On sait que pour tout $X \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{\cos^2(X)} = 1 + \tan^2(X)$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(\arctan(x)) = \dfrac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \dfrac{1}{1+x^2}$, donc $\sqrt{\cos^2(\arctan(x))} = \sqrt{\dfrac{1}{1+x^2}}$ ie $|\cos(\arctan(x))| = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Or $\arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos(\arctan(x)) > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

2. On sait que pour tout $X \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, $\tan(X) = \dfrac{\sin(X)}{\cos(X)}$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = \dfrac{\sin(\arctan(x))}{\cos(\arctan(x))}$, donc $\sin(\arctan(x)) = x \times \cos(\arctan(x))$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Exercice 17. Simplifier les expressions suivantes :

1. $\cos(2\arccos x)$ 2. $\sin(2\arccos x)$ 3. $\cos(2\arctan x)$

Correction.

1.

$$\begin{aligned}\cos(2\arccos(x)) &= 1 - 2\cos^2(\arccos(x)) \quad \#\cos(2X) = 1 - 2\cos^2(X)\\ &= 1 - 2x^2.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\sin(2\arccos(x)) &= 2\sin(\arccos(x))\cos(\arccos(x)) \quad \# \sin(2X)=2\sin(X)\cos(X)\\ &= 2\sqrt{1-x^2}\times x\\ &= 2x\sqrt{1-x^2}.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\cos(2\arctan(x)) &= 1-2\cos^2(\arctan(x)) && \# \cos(2X)=1-2\cos^2(X)\\ &= 1-2\frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} && \# \frac{1}{\cos^2(X)}=1+\tan^2(X)\\ &= 1-2\frac{1}{1+x^2}\\ &= \frac{x^2-1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

Exercice 18. 1. Montrer que pour tout $x\in[-1,1]$,

$$\arccos(x)+\arcsin(x)=\frac{\pi}{2}.$$

2. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^{+\star}$, $\quad \arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$.

Correction.

1. On introduit la fonction $f(x)=\arccos(x)+\arcsin(x)$ pour tout $x\in[-1,1]$. f est continue sur $[-1,1]$ et f est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x\in]-1,1[$, $f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$. La fonction f est donc constante sur $[-1,1]$ et pour tout $x\in[-1,1]$,

$$\begin{aligned}f(x) &= f(0)\\ &= \arccos(0)+\arcsin(0)\\ &= \frac{\pi}{2}+0\\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout $x\in[-1,1]$, $\arccos(x)+\arcsin(x)=\dfrac{\pi}{2}$.

2. On introduit la fonction $g(x)=\arctan(x)+\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour tout $x\in]0,+\infty[$. La fonction g est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x\in]0,+\infty[$,

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{1}{1+x^2}+\left[\frac{1}{x}\right]'\times\arctan'\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= \frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}\times\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\\ &= \frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2+1}\\ &= 0.\end{aligned}$$

La fonction g est donc constante sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x\in]0,+\infty[$, $g(x)=g(1)=2\arctan(1)=2\times\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$.

Conclusion : Pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\arctan(x)+\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 19. 1. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive des fonctions arcsin, arccos et arctan.

2. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Correction.

1. Une primitive de $f(x) = \arcsin(x)$ est $F(x) = \int_0^x \arcsin(t)\,\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x 1 \times \arcsin(t)\,\mathrm{d}t \\ &= [t \times \arcsin(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= x\arcsin(x) + \int_0^x \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= x\arcsin(x) + \left[\sqrt{1-t^2}\right]_0^x \\ &= x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} - 1. \end{aligned}$$

Une primitive de $x \mapsto \arcsin(x)$ est $x \mapsto x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} - 1$.
Une primitive de $x \mapsto \arccos(x)$ est $x \mapsto x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + 1$.
Une primitive de $x \mapsto \arctan(x)$ est $x \mapsto x\arctan(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

2.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= [\arctan(x)]_0^1 \\ &= \arctan(1) - \arctan(0) \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= [\arcsin(x)]_{-1/2}^{1/2} \\ &= \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 2\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 2 \times \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$