Une urne contient deux boules blanches et une boule noire. On y effectue une succession de tirages de la façon suivante : on tire une boule ; si elle est noire, on la remet dans l'urne ; si elle est blanche, on remet dans l'urne une boule noire à la place de la boule blanche.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note Y_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne à l'issue du n-ième tirage. Ainsi Y_n prend ses valeurs dans $\{0;1;2\}$.

1. Déterminer la loi de Y_1.

2. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y_n = 2)$.

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = P(Y_n = 1)$

a. Préciser u_1.

b. Rappeler la formules des probabilités totales et en déduire que :
$\forall n \geq 1, u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{2}{3^{n+1}}$

c. En utilisant la suite de terme général $v_n = u_n + \dfrac{2}{3^n}$, donner une expression de u_n en fonction de n.

4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $P(Y_n = 0)$.

5. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'espérance de Y_n.

6. On définit la variable aléatoire Z correspondant à l'instant où, pour la première fois, l'urne ne contient plus que des boules noires.

Déterminer la loi de Z . Montrer que Z est d'espérance finie et calculer $E(Z)$.

On considère la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 4 & -15 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \end{pmatrix}$.
I_3 désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. On pose $B = A - I_3$.

  a. Calculer B^2.

  b. En déduire une relation entre A^2, A et I_3.

2. On considère le polynôme $P = X^2 - 2X + 1$. Déterminer les racines de P.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire la relation de division euclidienne de X^n par P, dont le reste sera noté R_n.

  b. Déterminer R_n.

4. Déduire de ce qui précède l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$;

5. Proposer une autre méthode pour déterminer A^n.

****

Soit a et b deux nombres réels et n un entier naturel.
Calculer $\int_a^b (x-a)^n (x-b)^n dx$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^n dx$.

1. a. Calculer I_1 .

b. Interpréter géométriquement ce calcul.

2. a. Etudier les variations de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

b. Montrer que : pour tout $n \geq 1$, $I_n \geq 0$

c. Etudier la convergence de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$

b. En déduire $\lim\limits_{n\longmapsto+\infty} I_n$

c. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{e(-1)^{n+k} n!}{k!} + (-1)^{n-1} n!$

****

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto AM - MA. \end{aligned}$$

i. On admet que φ est dans $\mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$, donner sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

ii. Déterminer $\ker\varphi$ et $\mathrm{Im}\varphi$.

1. Soient $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, non scalaire et
$\varphi : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \qquad M \longmapsto AM - MA.$

i. Prouver que φ est dans $\mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$, puis donner sa matrice dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

ii. Déterminer deux éléments de $\ker\varphi$. Que peut-on en déduire pour la dimension de $\ker\varphi$?

iii. Montrer que est le rang de φ est supérieur ou égal à 2.

iv. En déduire $\ker\varphi$.

****

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ vérifiant :
Pour tout $x \in [a;b]$, $f(a+b-x) = f(x)$.

a) Démontrer que $\displaystyle\int_a^b x f(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$.

b) En déduire $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad (a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \right\}$.

a. Prouver que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. En donner une base.

b. Calculer M^n pour un élément M de E et n dans $\mathbb{N}$.

****

Soit α un réel strictement supérieur à 1. Pour n entier supérieur ou égal à 2, on pose :

$$u_n = \frac{1}{(n-1)^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} - 2\frac{1}{n^\alpha}$$

1. Montrer que la série de terme général u_n converge.
2. Pour $n \geq 2$, simplifier : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \Big(\frac{1}{(k-1)^\alpha} - \frac{1}{k^\alpha} \Big)$.
3. On pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k$. Déduire de ce qui précède que :

   $S_n = 1 - \dfrac{1}{2^\alpha} + \dfrac{1}{(n+1)^\alpha} - \dfrac{1}{(n)^\alpha}$
4. Donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} u_k$. On la note S.
5. Donner un équivalent simple de $S - S_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.