

## Chapitre 11 : Géométrie élémentaire de l'espace

Dans ce chapitre, on notera  $\mathcal{E}$  l'ensemble des points de l'espace et  $\vec{\mathcal{E}}$  l'ensemble des vecteurs de l'espace

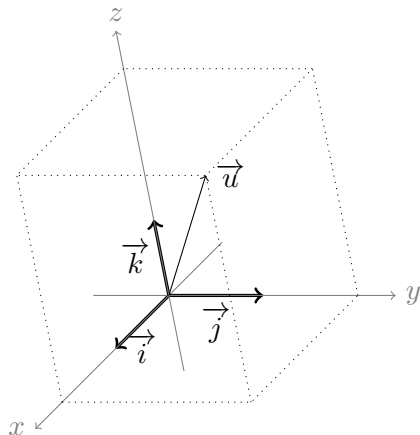
### 1 Repérage dans l'espace

#### 1.1 Repère cartésien

**Définition.** (Base de  $\vec{\mathcal{E}}$ ) On dit que trois vecteurs  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  de  $\vec{\mathcal{E}}$  constituent une *base de  $\vec{\mathcal{E}}$*  si et seulement si pour tout vecteur  $\vec{u}$  de  $\vec{\mathcal{E}}$ , il existe un unique triplet  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tel que

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

On appelle coordonnées de  $\vec{u}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  le triplet  $(x, y, z)$ .

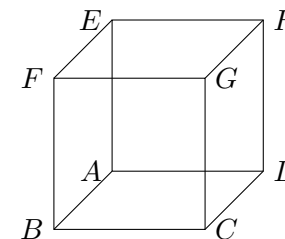


**Définition.** (Repère cartésien) Un *repère cartésien de  $\mathcal{E}$*  est la donnée d'un point  $O$  appelé *origine du repère* et d'une base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de  $\vec{\mathcal{E}}$ . On note le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .  
Soit  $M \in \mathcal{E}$ . Alors  $\vec{OM} \in \vec{\mathcal{E}}$  et il existe un unique triplet  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tel que

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Le triplet  $(x, y, z)$  est appelé coordonnées de  $M$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

**Exercice 1.** Soit  $ABCDEFGH$  un cube de côté 1. Déterminer les coordonnées des sommets de ce cube dans le repère  $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ .

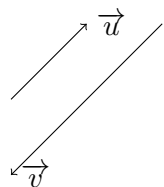


## 1.2 Recherche des repères de $\mathcal{E}$

### Vecteurs colinéaires et coplanaires.

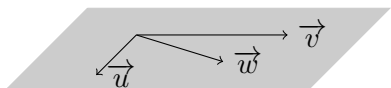
**Définition.** Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de  $\vec{\mathcal{E}}$  sont dits *colinéaires* s'il existe  $k \in \mathbb{R}$  tel que

$$\vec{u} = k\vec{v} \text{ ou } \vec{v} = k\vec{u}.$$



Trois vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  de  $\vec{\mathcal{E}}$  sont dits *coplanaires* s'il existe  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$  non tous nuls tels que

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}.$$



*Remarque.* Deux vecteurs sont colinéaires si leurs coordonnées sont proportionnelles (ex : (1, 2, 3) et (2, 4, 6)).

Trois vecteurs sont coplanaires s'il est possible d'exprimer l'un d'entre eux comme combinaison linéaire des deux autres.

### Caractérisations des bases de $\mathcal{E}$ .

Soit  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base de  $\vec{\mathcal{E}}$ . Soit  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \vec{\mathcal{E}}^3$  tel que

$$\begin{array}{l} \vec{u} \quad (u_1, u_2, u_3) \\ \vec{v} \quad (v_1, v_2, v_3) \\ \vec{w} \quad (w_1, w_2, w_3) \end{array} \quad \text{dans } (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}).$$

On appelle déterminant de  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et on note

$\det_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  le déterminant

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}.$$

**Théorème.** Soit  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \vec{\mathcal{E}}^3$ .

$$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ sont coplanaires} \iff \det_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0.$$

**Théorème.** Soient  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base de  $\vec{\mathcal{E}}$  et  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \vec{\mathcal{E}}^3$ .

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ est une base de } \vec{\mathcal{E}} \iff \det_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$$

$$\iff \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ ne sont pas coplanaires.}$$

**Exercice 2.** Soit  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base de  $\vec{\mathcal{E}}$ . On pose  $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ ,  $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ . La famille  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$  constitue-t-elle une base de  $\vec{\mathcal{E}}$  ?

Espace - Objets géométriques	$\mathbb{R}^3$ - Objets analytiques	Notations dans $\mathbb{R}^3$
Point $M$	Coordonnées dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$	$(x, y, z)$
Vecteur $\vec{u}$	Coordonnées dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$	$(u_1, u_2, u_3)$
Vecteur $\overrightarrow{AB}$	Coordonnées dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$	$(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$
Sphère de centre $O$ et de rayon 1	Ensemble de triplets de $\mathbb{R}^3$	$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
Translation $t$ de vecteur $\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$	Expression analytique	$t : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + 1, y - 1, z + 2) \end{array}$

**Identification de l'espace avec  $\mathbb{R}^3$**

### 1.3 Orientation. Repère orthogonal. Repère orthonormal.

#### Orientation de l'espace.

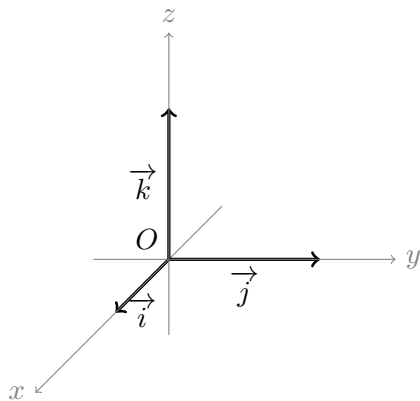
Soit  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base de  $\vec{E}$ .

Une base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  de  $\vec{E}$  est dite *de même orientation* que  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  si et seulement si  $\det_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) > 0$ .

Une base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  de  $\vec{E}$  est dite *d'orientation contraire* à  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  si et seulement si  $\det_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) < 0$ .

Orienter  $\vec{E}$  revient à choisir une base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Toute base de même orientation que  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est dite *directe* et toute autre base est dite *indirecte*.

Il n'existe aucun critère mathématique pour privilégier une orientation plutôt qu'une autre; ce choix ne peut être qu'arbitraire. En général, on convient de dire que le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est *direct* si lorsque l'on tourne de  $\vec{i}$  vers  $\vec{j}$ , on progresse dans le sens de  $\vec{k}$  (Règle des trois doigts de la main droite). Ces conventions sont utilisées en physique.

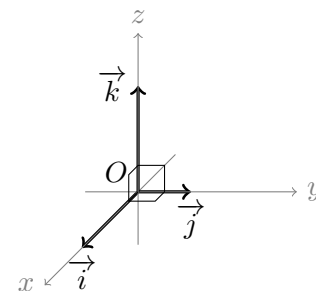


#### Repère orthogonal.

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une *base orthogonale* de  $\vec{E}$  si et seulement si :

$$\begin{cases} (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \text{ est une base,} \\ \vec{i} \perp \vec{j}, \quad \vec{i} \perp \vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{j} \perp \vec{k}. \end{cases}$$

Un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est dit *orthogonal* si  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une base orthogonale de  $\vec{E}$ .

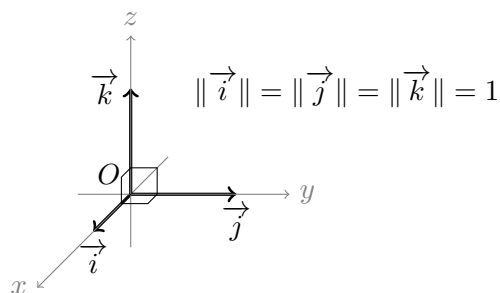


#### Repère orthonormé.

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une *base orthonormale* de  $\vec{E}$  si et seulement si :

$$\begin{cases} (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \text{ est une base,} \\ \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1, \\ \vec{i} \perp \vec{j}, \quad \vec{i} \perp \vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{j} \perp \vec{k}. \end{cases}$$

Un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est dit *orthonormal* si  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une base orthonormale de  $\vec{E}$ .



## 2 Produit scalaire

On travaille à présent dans un espace orienté. On munit  $\mathcal{E}$  d'un repère orthonormal direct  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

**Définition.** Soit  $(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{E}^2$ . On appelle produit scalaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et on note  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  le produit scalaire de  $\vec{u}$  et de  $\vec{v}$  calculé dans un plan contenant  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Proposition.** (1) Pour tout  $\vec{u} \in \mathcal{E}$ ,

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2.$$

(2) Pour tout  $(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{E}^2$ ,

$$\vec{u} \perp \vec{v} \text{ si et seulement si } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

(3) Symétrie du produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

(4) Bilinearité du produit scalaire :

$$\begin{aligned} (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} &= \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) & \text{et} & & (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} &= \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \\ \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) &= \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) & \text{et} & & \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \end{aligned}$$

**Proposition.** Soit  $(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{E}^2$  de coordonnées  $\vec{u}(x, y, z)$  et  $\vec{v}(x', y', z')$  dans  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , base orthonormée directe. On a

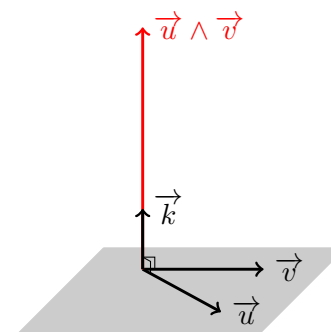
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

En particulier  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

## 3 Produit vectoriel dans l'espace orienté

**Définition.** Soit  $(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{E}^2$ . On appelle produit vectoriel de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et on note  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ , le vecteur :

- nul si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires,
- égal à  $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\vec{u}, \vec{v})| \times \vec{k}$ , où  $\vec{k}$  est le vecteur unitaire « directement orthogonal à  $(\vec{u}, \vec{v})$  », c'est-à-dire tel que  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$  constitue une base directe de  $\mathcal{E}$ , sinon.



*Remarque.* Pour tout  $\vec{u} \in \mathcal{E}$ ,  $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ .

**Exercice 3.** Déterminer  $\vec{i} \wedge \vec{j}$ ,  $\vec{i} \wedge \vec{k}$ ,  $\vec{k} \wedge \vec{j}$  et  $2\vec{j} \wedge 3\vec{i}$ .

**Proposition.** (1) Pour tout  $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{E}}^2$ ,

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \iff \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}.$$

(2) Pour tout  $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{E}}^2$ , le vecteur  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  est orthogonal à  $\vec{u}$  et à  $\vec{v}$ . En particulier :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{et} \quad (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0.$$

(3) Soit  $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{E}}^2$  tel que  $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$  et  $\vec{u} \perp \vec{v}$ . Alors  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$  est une base orthonormale directe de  $\vec{\mathcal{E}}$ .

**Proposition.** Antisymétrie du produit vectoriel : Pour tout  $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{E}}^2$ ,

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u}).$$

Bilinéarité du produit vectoriel : Pour tout  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \vec{\mathcal{E}}^3$  et tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} (\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} &= \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) & \text{et} & & (\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} &= \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w} \\ \vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) &= \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) & \text{et} & & \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}. \end{aligned}$$

**Exercice 4.** Déterminer le produit vectoriel des vecteurs  $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$  et  $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ .

**Proposition.** Soit  $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{E}}^2$  de coordonnées respectives  $(u_1, u_2, u_3)$  et  $(v_1, v_2, v_3)$  dans  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  (orthonormée directe). Alors :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k}.$$

Les coordonnées de  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  sont donc 
$$\begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}.$$

## 4 Produit mixte dans l'espace orienté

**Définition.** L'espace étant orienté, on appelle *produit mixte* ou *déterminant des vecteurs*  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ , et on note  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$  le réel :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

Remarque : Cette définition dépend de l'orientation de l'espace fixée.

**Exercice 5.** Déterminer  $[\vec{i}, \vec{j}, 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}]$ .

On remarque que :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \quad \begin{array}{l} \text{si et seulement si } (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0 \\ \text{si et seulement si } (\vec{u} \wedge \vec{v}) \perp \vec{w} \\ \text{si et seulement si } \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont coplanaires.} \end{array}$$

**Proposition.** Les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires si et seulement si

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0.$$

**Proposition.** Antisymétrie du produit mixte : Le produit mixte de trois vecteurs est changé en son opposé lorsqu'on échange deux vecteurs.

Par exemple,

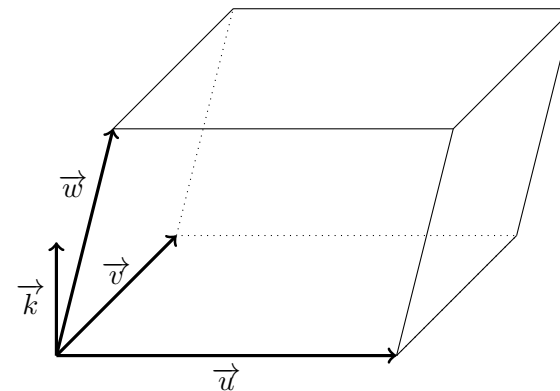
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}].$$

Trilinéarité du produit mixte : Pour tout  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}) \in \mathcal{E}^4$  et tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{array}{l} [\lambda \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \lambda [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}], \quad [\vec{u} + \vec{z}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{z}, \vec{v}, \vec{w}], \\ [\vec{u}, \lambda \vec{v}, \vec{w}] = \lambda [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}], \quad [\vec{u}, \vec{v} + \vec{z}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{z}, \vec{w}], \\ [\vec{u}, \vec{v}, \lambda \vec{w}] = \lambda [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}], \quad [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + \vec{z}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}]. \end{array}$$

Interprétation géométrique du produit mixte :

$$|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \text{volume du parallélépipède engendré par } \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}.$$



*Démonstration.*

**Expression du produit mixte dans une base orthonormale directe :**

Soit  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \vec{\mathcal{E}}^3$  de coordonnées  $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ ,  $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ ,  $\vec{w}(w_1, w_2, w_3)$  dans  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \det_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

Le déterminant de la famille  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est indépendant de la base orthonormée directe choisie.

*Démonstration.*

## 5 Plans et droites de $\mathcal{E}$

$\mathcal{E}$  est muni d'un repère orthonormal direct  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Dans la suite, les coordonnées des points de  $\mathcal{E}$  sont données dans le repère  $\mathcal{R}$ , et celles des vecteurs de  $\vec{\mathcal{E}}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

### 5.1 Plans de $\mathcal{E}$

#### A. Définition

**Définition.** Soit  $\mathcal{P}$  une partie de  $\mathcal{E}$ . On dit que  $\mathcal{P}$  est un *plan de  $\mathcal{E}$*  si et seulement s'il existe  $A \in \mathcal{E}$  et  $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{E}}^2$  non colinéaires tels que  $\mathcal{P}$  est l'ensemble des points  $M$  vérifiant

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont appelés *vecteurs générateurs de  $\mathcal{P}$* .

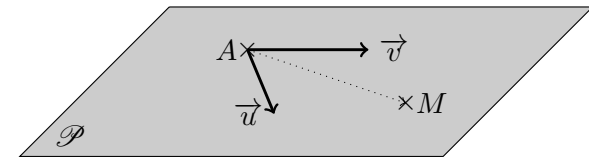
Il existe différents modes de définition d'un plan :

1. Un point et deux vecteurs non colinéaires définissent un plan :

Soit  $A \in \mathcal{E}$  et  $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{E}}^2$  non colinéaires.

Le plan  $\mathcal{P}$  passant par le point  $A$  et engendré par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est l'ensemble des points  $M$  de  $\mathcal{E}$  tels que les vecteurs  $\overrightarrow{AM}$ ,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont coplanaires :

$$[\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}] = 0.$$



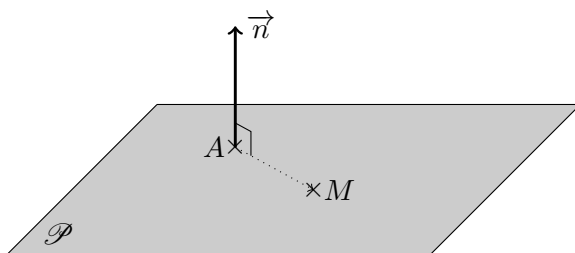
2. Un point et un vecteur normal définissent un plan :

Soit  $A \in \mathcal{E}$  et  $\vec{n} \in \vec{\mathcal{E}}$  non nul.



Le plan  $\mathcal{P}$  passant par le point  $A$  et orthogonal à  $\vec{n}$  est l'ensemble des points  $M$  de  $\mathcal{E}$  tels que les vecteurs  $\overrightarrow{AM}$  et  $\vec{n}$  sont orthogonaux :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0.$$

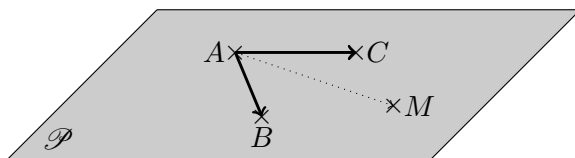


3. Trois points non alignés définissent un plan :

Soient  $A, B, C \in \mathcal{E}$  non alignés.

Le plan  $\mathcal{P}$  contenant les points  $A, B$  et  $C$ , aussi noté  $(ABC)$ , est l'ensemble des points  $M$  de  $\mathcal{E}$  tels que les vecteurs  $\overrightarrow{AM}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont coplanaires :

$$[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 0.$$



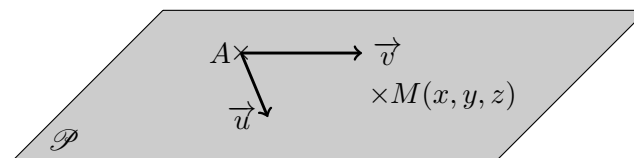
## B. Représentation paramétrique d'un plan de $\mathcal{E}$

**Proposition.** Soient  $A = (x_A, y_A, z_A)$  un point de  $\mathcal{E}$  et  $\vec{u}, \vec{v}$  deux vecteurs non colinéaires, tels que  $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$  et  $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ .

Le plan  $\mathcal{P}$  passant par  $A$  et engendré par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  admet comme **représentation paramétrique** :

$$\begin{cases} x = x_A + u_1\lambda + v_1\mu \\ y = y_A + u_2\lambda + v_2\mu \\ z = z_A + u_3\lambda + v_3\mu \end{cases} ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Réciproquement, tout système de cette forme représente un plan  $\mathcal{P}$  de  $\mathcal{E}$ , dont on connaît un point  $A = (x_A, y_A, z_A)$  et deux vecteurs générateurs :  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  et  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ .



**Exemple.** Le système

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = 2 + \mu \end{cases} ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,$$

est une représentation paramétrique du plan ...

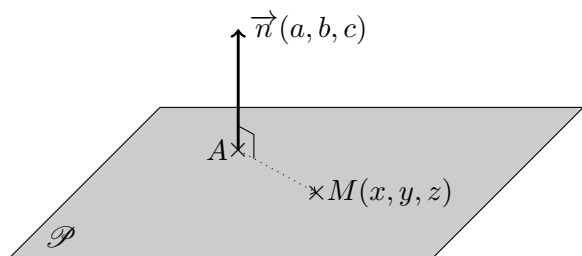
### C. Équation cartésienne d'un plan de $\mathcal{E}$

**Proposition.** Soit  $\vec{n} = (a, b, c)$  un vecteur non nul.

Si  $\mathcal{P}$  est un plan de  $\mathcal{E}$  orthogonal à  $\vec{n}$ , alors il existe  $d \in \mathbb{R}$  tel que

$$ax + by + cz + d = 0$$

soit une équation cartésienne de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{R}$ . Réciproquement : soit  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  tel que  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ , l'ensemble des points de  $\mathcal{E}$  dont une équation est  $ax + by + cz + d = 0$  est un plan orthogonal au vecteur  $\vec{n} = (a, b, c)$ .



**Exercice 6.** Déterminer une équation cartésienne du plan  $\mathcal{P}$  passant par le point  $A = (1, 0, -2)$ , orthogonal à  $\vec{n} = (1, 2, 3)$ .

### D. Méthodologie : « Passer d'une représentation paramétrique à une équation cartésienne »

On note  $\mathcal{P}$  le plan dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = -1 + 2\lambda + \mu \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Déterminer une équation cartésienne de  $\mathcal{P}$ .

**E. Méthodologie : « Passer d'une équation cartésienne à une représentation paramétrique »**

Déterminer une représentation paramétrique du plan  $\mathcal{P}$  dont une équation cartésienne est  $2x - y + z = 3$  dans  $\mathcal{R}$ .

**F. Position relative de deux plans**

Soit  $(\vec{n}, \vec{n}') \in \mathcal{E}^2$  non nuls. Soient  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  deux plans de  $\mathcal{E}$  tels que  $\mathcal{P}$  orthogonal à  $\vec{n}$  et  $\mathcal{P}'$  orthogonal à  $\vec{n}'$ .

**Définition.** Les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont *parallèles* si et seulement si  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont colinéaires, si et seulement si

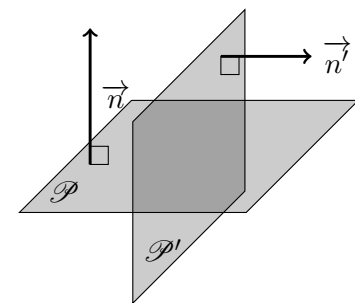
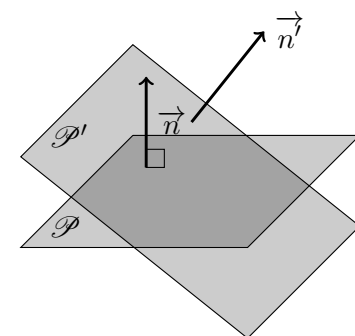
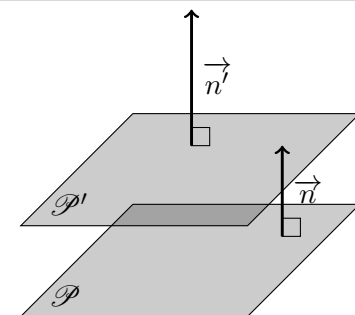
$$\vec{n} \wedge \vec{n}' = \vec{0}.$$

Les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont *sécants* si et seulement si  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  ne sont pas colinéaires, si et seulement si

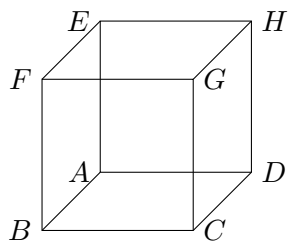
$$\vec{n} \wedge \vec{n}' \neq \vec{0}.$$

Les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  sont *perpendiculaires* si et seulement si  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont orthogonaux, si et seulement si

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0.$$



**Exemple.** Soit  $ABCDEFGH$  un cube. Les plans  $(ABC)$  et  $(FGH)$  sont parallèles. Les plans  $(EFG)$  et  $(BGH)$  sont sécants et leur intersection est la droite  $(GH)$ . Les plans  $(ABC)$  et  $(DGH)$  sont perpendiculaires.



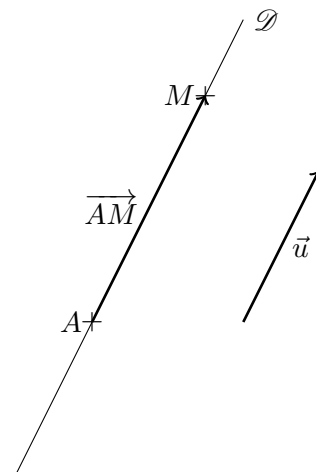
**Proposition.** L'intersection de deux plans de  $\mathcal{E}$  est soit vide, soit une droite, soit un plan (s'ils sont confondus).

## 5.2 Droites de $\mathcal{E}$

**Définition.** Soit  $\mathcal{D}$  une partie de  $\mathcal{E}$ . On dit que  $\mathcal{D}$  est une droite si et seulement si il existe  $A \in \mathcal{E}$  et  $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}} \setminus \{\vec{0}\}$  tels que  $\mathcal{D}$  est l'ensemble des points  $M$  de  $\mathcal{E}$  vérifiant

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u}, \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas,  $\mathcal{D}$  est la droite passant par  $A$  et dirigée par  $\vec{u}$ .



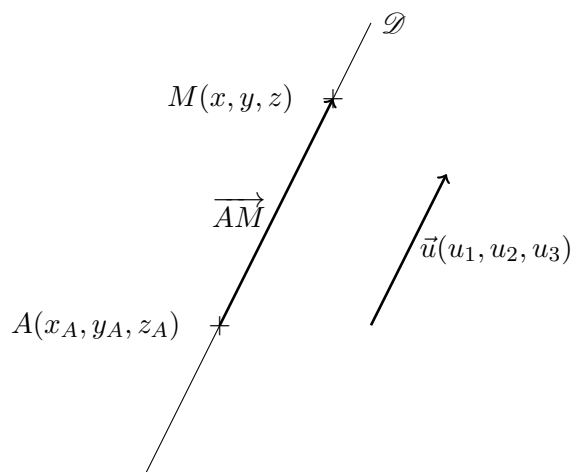
## A. Représentation paramétrique d'une droite de $\mathcal{E}$

**Proposition.** Soient  $A = (x_A, y_A, z_A)$  un point de  $\mathcal{E}$  et  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  un vecteur non nul.

La droite  $\mathcal{D}$  passant par  $A$  et dirigée par  $\vec{u}$  admet comme **représentation paramétrique** :

$$\begin{cases} x = x_A + u_1 t \\ y = y_A + u_2 t \\ z = z_A + u_3 t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$$

Réciproquement, tout système de cette forme représente une droite de  $\mathcal{E}$ , dont on connaît un point  $A = (x_A, y_A, z_A)$  et un vecteur directeur  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ .



## B. Système d'équations cartésiennes d'une droite

**Proposition.** Soit  $\mathcal{D}$  une droite de  $\mathcal{E}$ . Il existe  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  et  $(a', b', c', d') \in \mathbb{R}^4$  avec  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  et  $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$ , tels que

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

soit un système d'équations cartésiennes de  $\mathcal{D}$  dans  $\mathcal{R}$ .

## C. Méthodologie : « Passer d'une représentation paramétrique à un système d'équations cartésiennes d'une droite »

Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite  $\mathcal{D}$  passant par  $A = (1, -1, 1)$  et dirigée par  $\vec{u} = (1, 2, 3)$ .

**D. Méthodologie : « Passer d'un système d'équations cartésiennes à une représentation paramétrique d'une droite »**

Déterminer une représentation paramétrique de la droite

$$\mathcal{D} : \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 3x - z = 2 \end{cases} .$$

## E. Position relative

### POSITION RELATIVE DE DEUX DROITES

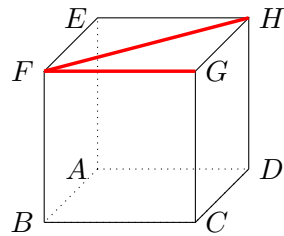
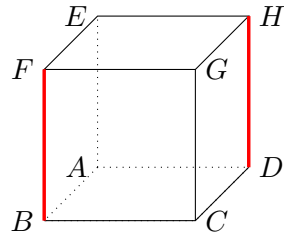
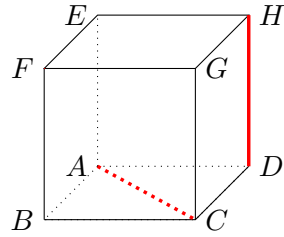
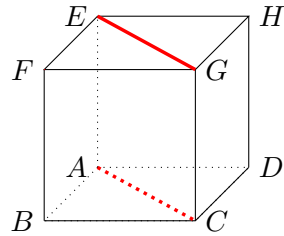
On note  $\mathcal{D}$  la droite passant par  $A$  et dirigée par  $\vec{u}$  non nul, et  $\mathcal{D}'$  la droite passant par  $A'$  et dirigée par  $\vec{u}'$  non nul.

Les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont :

- soit *coplanaires* (si  $[\overrightarrow{AA'}, \vec{u}, \vec{u}'] = 0$ ),
- soit *non coplanaires* (si  $[\overrightarrow{AA'}, \vec{u}, \vec{u}'] \neq 0$ ).

Si  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont coplanaires, alors elles sont :

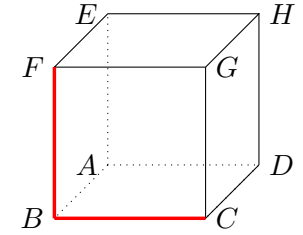
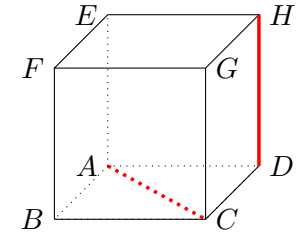
- soit *parallèles* (si  $\vec{u} \wedge \vec{u}' = \vec{0}$ ),
- soit *sécantes* (si  $\vec{u} \wedge \vec{u}' \neq \vec{0}$ ).



Les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont dites *orthogonales* si et seulement si  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  sont orthogonaux, si et seulement si

$$\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0.$$

Elles sont dites *perpendiculaires* si elles sont sécantes et orthogonales.



*Remarque.* Deux droites perpendiculaires sont orthogonales, mais la réciproque est fautive.

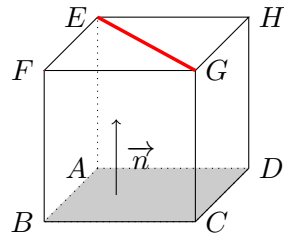
**Proposition.** L'intersection de deux droites de  $\mathcal{E}$  est soit vide, soit un point, soit une droite (si elles sont confondues).

## POSITION RELATIVE D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

Soient  $\mathcal{D}$  une droite de  $\mathcal{E}$  de vecteur directeur  $\vec{u}$  non nul et  $\mathcal{P}$  un plan de  $\mathcal{E}$  orthogonal à  $\vec{n}$  non nul.

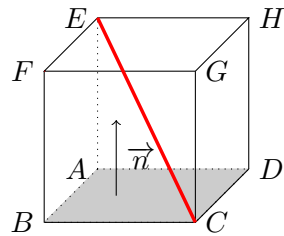
La droite  $\mathcal{D}$  est *parallèle* au plan  $\mathcal{P}$  si et seulement si  $\vec{u} \perp \vec{n}$ , si et seulement si

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0.$$



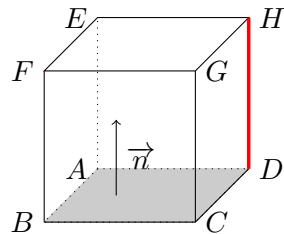
La droite  $\mathcal{D}$  est *sécante* au plan  $\mathcal{P}$  si et seulement si

$$\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0.$$



La droite  $\mathcal{D}$  est *perpendiculaire* au plan  $\mathcal{P}$  si et seulement si  $\vec{u}$  et  $\vec{n}$  sont colinéaires, si et seulement si

$$\vec{u} \wedge \vec{n} = \vec{0}.$$



**Proposition.** L'intersection d'une droite et d'un plan de  $\mathcal{E}$  est soit vide, soit un point, soit une droite.

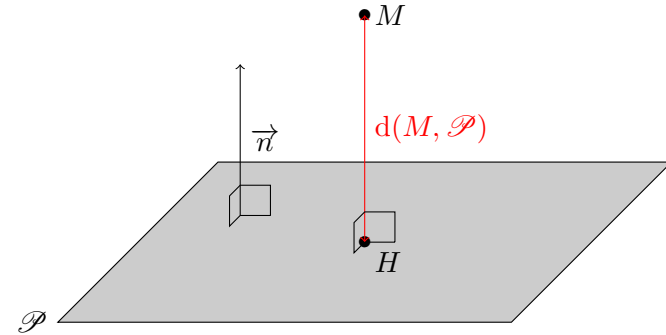
## 5.3 Distances et projetés orthogonaux

### A. Distance d'un point à un plan de $\mathcal{E}$

**Définition.** Soient  $\mathcal{P}$  un plan de  $\mathcal{E}$  et  $M$  un point de  $\mathcal{E}$ . On appelle *distance du point  $M$  au plan  $\mathcal{P}$*  et on note  $d(M, \mathcal{P})$  la plus petite distance entre  $M$  et un point de  $\mathcal{P}$ . Le théorème de Pythagore assure que

$$d(M, \mathcal{P}) = MH,$$

où  $H$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur  $\mathcal{P}$ .



**Théorème.** Soient  $\mathcal{P}$  un plan de  $\mathcal{E}$  d'équation  $ax + by + cz + d = 0$  et  $M = (x_M, y_M, z_M)$  un point de  $\mathcal{E}$ . Alors :

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

**Exemple.** Déterminer la distance du point  $M = (1, 2, 3)$  au plan  $\mathcal{P} : x + 2z - 5 = 0$ .



**B. Méthodologie : « Déterminer le projeté orthogonal d'un point sur un plan »**

Déterminer les coordonnées du point  $H$ , projeté orthogonal du point  $M = (1, 2, 3)$  sur le plan  $\mathcal{P} : x + 2z - 5 = 0$ .

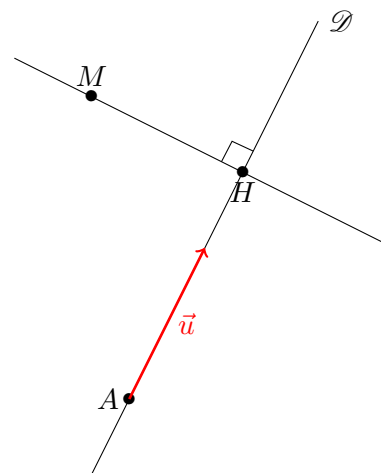
**C. Distance d'un point à une droite de  $\mathcal{E}$**

On considère la droite  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{E}$  passant par  $A$  et dirigée par  $\vec{u}$  non nul.

Soit  $M \in \mathcal{E}$ . On rappelle que la distance du point  $M$  à la droite  $\mathcal{D}$ , notée  $d(M, \mathcal{D})$ , est la plus petite distance entre  $M$  et un point de  $\mathcal{D}$  et donc que

$$d(M, \mathcal{D}) = MH,$$

où  $H$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur  $\mathcal{D}$ .



On a  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}$ . Donc  $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \wedge \vec{u} = \overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}$  et  $\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\| = \|\overrightarrow{HM}\| \|\vec{u}\|$ . D'où

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

**Exemple.** Déterminer la distance du point  $M = (1, 0, 1)$  à la droite  $\mathcal{D}$  passant par  $A = (1, -1, 1)$  et dirigée par  $\vec{u} = (1, 2, 3)$ .

**D. Méthodologie : « Déterminer le projeté orthogonal d'un point sur une droite »**

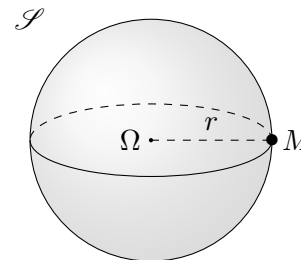
Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point  $M = (1, 0, 1)$  sur la droite  $\mathcal{D}$  passant par  $A = (1, -1, 1)$  et dirigée par  $\vec{u} = (1, 2, 3)$ .

## 6 Sphères

$\mathcal{E}$  est muni d'un repère orthonormal direct  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

**Définition.** Soient  $\Omega \in \mathcal{E}$  et  $r$  un réel strictement positif. On appelle *sphère de centre  $\Omega$  et de rayon  $r$*  l'ensemble des points  $M$  de  $\mathcal{E}$  tels que

$$\Omega M = r.$$



### 6.1 Équation cartésienne d'une sphère

**Proposition.** Soient  $\Omega \in \mathcal{E}$  et  $r$  un réel strictement positif. On note  $(a, b, c)$  les coordonnées de  $\Omega$  dans  $\mathcal{R}$ . Une équation cartésienne de la sphère  $\mathcal{S}$  de centre  $\Omega$  et de rayon  $r$  est :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

**Proposition.** Soit  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ . On note  $\mathcal{A}$  l'ensemble d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0.$$

Alors  $\mathcal{A}$  est une sphère, un point ou le vide.

**Exercice 7.** Décrire l'ensemble  $\mathcal{A}$  des points de  $\mathcal{E}$  dont une équation cartésienne est :

1.  $\mathcal{A} : x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 20 = 0.$

2.  $\mathcal{A} : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z + 3 = 0.$

3.  $\mathcal{A} : x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y + \frac{5}{2} = 0.$

## 6.2 Sphère définie par son diamètre

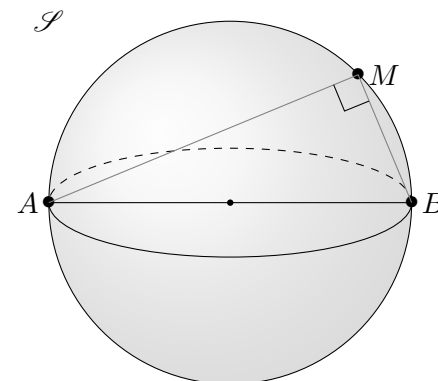
Soient  $A(x_A, y_A, z_A)$  et  $B(x_B, y_B, z_B)$  deux points distincts de  $\mathcal{E}$ .

**Proposition.** On considère  $\mathcal{S}$  la sphère de diamètre  $[AB]$ . Soit  $M \in \mathcal{E}$  :

$$M \in \mathcal{S} \iff \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

Une équation cartésienne de la sphère  $\mathcal{S}$  est donc

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0.$$



**Exemple.** Soient  $A$  et  $B$  deux points de  $\mathcal{E}$  de coordonnées  $(0, -1, 1)$  et  $(-2, 1, 1)$ . Déterminer une équation cartésienne de la sphère  $\mathcal{S}$  de diamètre  $[AB]$ .

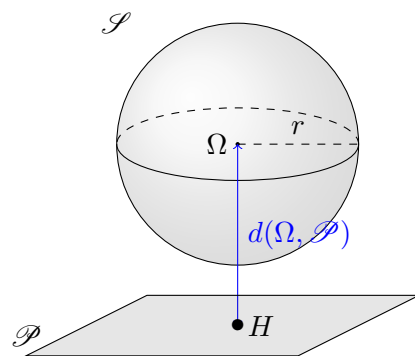
### 6.3 Intersection d'une sphère et d'un plan

**Proposition.** Soient  $\Omega \in \mathcal{E}$  et  $r > 0$ . On appelle  $\mathcal{S}$  la sphère de centre  $\Omega$  et de rayon  $r$ . Soit  $\mathcal{P}$  un plan de  $\mathcal{E}$ .

On note  $H$  le projeté du point  $\Omega$  sur le plan  $\mathcal{P}$ .

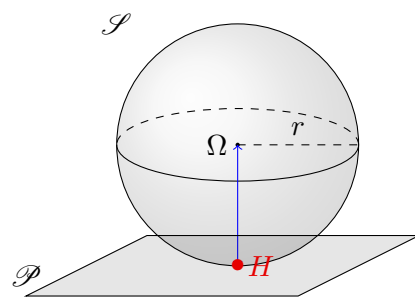
Si  $d(\Omega, \mathcal{P}) > r$ , alors

$$\mathcal{S} \cap \mathcal{P} = \emptyset;$$



Si  $d(\Omega, \mathcal{P}) = r$ , alors

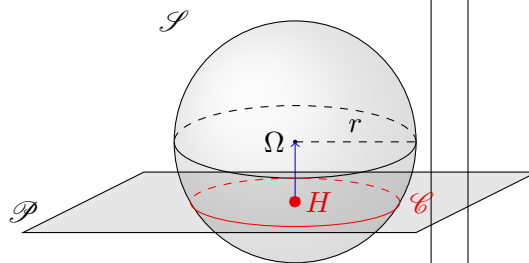
$$\mathcal{S} \cap \mathcal{P} = \{H\}$$



où  $H$  est le projeté orthogonal de  $\Omega$  sur  $\mathcal{P}$ .

Si  $d(\Omega, \mathcal{P}) < r$ , alors

$$\mathcal{S} \cap \mathcal{P} = \mathcal{C},$$



où  $\mathcal{C}$  est le cercle inclus dans  $\mathcal{P}$  de centre  $H$  et de rayon  $\sqrt{r^2 - d(\Omega, \mathcal{P})^2}$ .