Lycée Louis Vincent
C. Scholl

Chapitre 11 : Géométrie élémentaire de l'espace

Dans ce chapitre, on notera $\mathscr{E}$ l'ensemble des points de l'espace et $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace

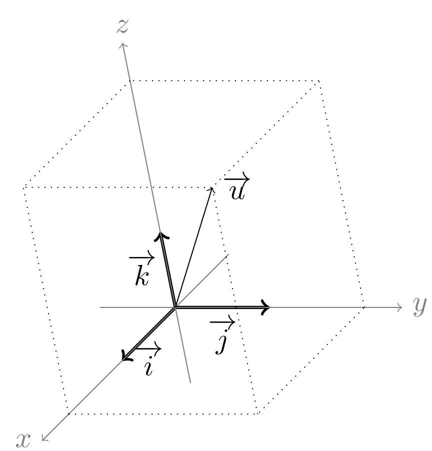
1 Repérage dans l'espace

1.1 Repère cartésien

Définition. (Base de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$) On dit que trois vecteurs $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ constituent une *base de* $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ si et seulement si pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$, il existe un unique triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}.$$

On appelle coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ le triplet (x, y, z).

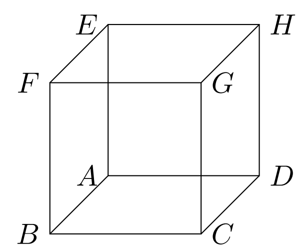


Définition. (Repère cartésien) Un *repère cartésien de* $\mathscr{E}$ est la donnée d'un point O appelé *origine du repère* et d'une base $(\overrightarrow{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$. On note le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Soit $M \in \mathscr{E}$. Alors $\overrightarrow{OM} \in \overrightarrow{\mathscr{E}}$ et il existe un unique triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}.$$

Le triplet (x, y, z) est appelé coordonnées de M dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Exercice 1. Soit $ABCDEFGH$ un cube de côté 1. Déterminer les coordonnées des sommets de ce cube dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

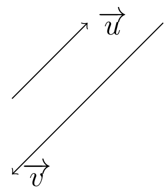


1.2 Recherche des repères de $\mathscr{E}$

Vecteurs colinéaires et coplanaires.

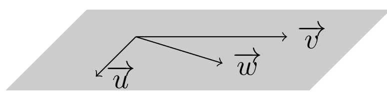
Définition. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ sont dits *colinéaires* s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\vec{u} = k\vec{v} \text{ ou } \vec{v} = k\vec{u}.$$



Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ sont dits *coplanaires* s'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ non tous nuls tels que

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}.$$



Remarque. Deux vecteurs sont colinéaires si leurs coordonnées sont proportionnelles (ex : $(1, 2, 3)$ et $(2, 4, 6)$).
Trois vecteurs sont coplanaires s'il est possible d'exprimer l'un d'entre eux comme combinaison linéaire des deux autres.

Caractérisations des bases de $\mathscr{E}$.

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$. Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in \overrightarrow{\mathscr{E}}^3$ tel que

$$\begin{array}{ll} \vec{u} & (u_1, u_2, u_3) \\ \vec{v} & (v_1, v_2, v_3) \\ \vec{w} & (w_1, w_2, w_3) \end{array} \qquad \text{dans } (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}).$$

On appelle déterminant de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et on note $\det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ le déterminant

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Théorème. Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in \overrightarrow{\mathscr{E}}^3$.

$$\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \text{ sont coplanaires} \iff \det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0.$$

Théorème. Soient $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in \overrightarrow{\mathscr{E}}^3$.

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \text{ est une base de } \overrightarrow{\mathscr{E}} &\iff \det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \neq 0 \\ &\iff \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \text{ ne sont pas coplanaires.} \end{aligned}$$

Exercice 2. Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$. On pose $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$. La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ constitue-t-elle une base de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$?

Espace - Objets géométriques	$\mathbb{R}^3$ - Objets analytiques	Notations dans $\mathbb{R}^3$
Point M	Coordonnées dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$	(x, y, z)
Vecteur $\overrightarrow{u}$	Coordonnées dans $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$	(u_1, u_2, u_3)
Vecteur $\overrightarrow{AB}$	Coordonnées dans $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$	$(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$
Sphère de centre O et de rayon 1	Ensemble de triplets de $\mathbb{R}^3$	$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$
Translation t de vecteur $\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$	Expression analytique	$t : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x+1, y-1, z+2) \end{array}$

Identification de l'espace avec $\mathbb{R}^3$

1.3 Orientation. Repère orthogonal. Repère orthonormal.

Orientation de l'espace.

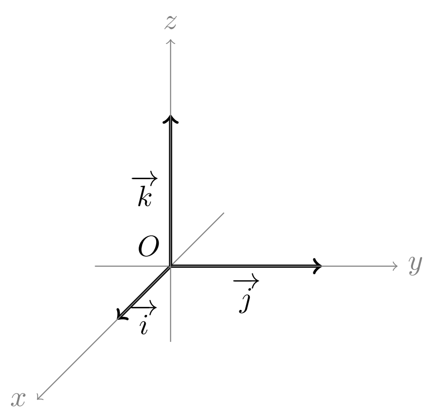
Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base de $\overrightarrow{E}$.

Une base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ est dite *de même orientation* que $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ si et seulement si $\det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) > 0$.

Une base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ est dite *d'orientation contraire* à $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ si et seulement si $\det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) < 0$.

Orienter $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ revient à choisir une base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Toute base de même orientation que $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est dite *directe* et toute autre base est dite *indirecte.*

Il n'existe aucun critère mathématique pour privilégier une orientation plutôt qu'une autre ; ce choix ne peut être qu'arbitraire. En général, on convient de dire que le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est direct si lorsque l'on tourne de $\vec{i}$ vers $\vec{j}$, on progresse dans le sens de $\vec{k}$ (Règle des trois doigts de la main droite). Ces conventions sont utilisées en physique.

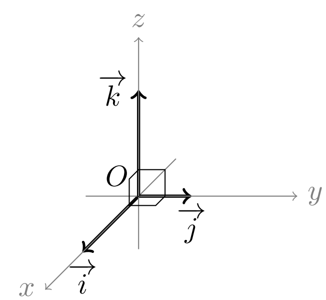


Repère orthogonal.

$(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une *base orthogonale* de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}) \text{ est une base,} \\ \vec{i} \perp \vec{j}, \quad \vec{i} \perp \vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{j} \perp \vec{k}. \end{cases}$$

Un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est dit *orthogonal* si $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une base orthogonale de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$.

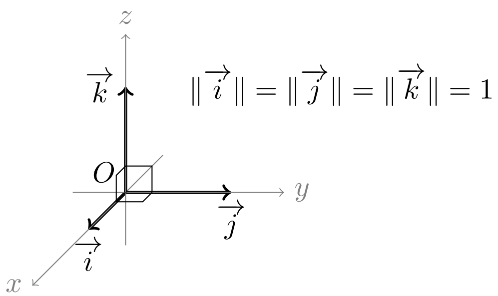


Repère orthonormé.

$(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une *base orthonormale* de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}) \text{ est une base,} \\ \|\overrightarrow{i}\| = \|\overrightarrow{j}\| = \|\overrightarrow{k}\| = 1, \\ \vec{i} \perp \vec{j}, \quad \vec{i} \perp \vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{j} \perp \vec{k}. \end{cases}$$

Un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est dit *orthonormal* si $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une base orthonormale de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$.



2 Produit scalaire

On travaille à présent dans un espace orienté. On munit $\mathscr{E}$ d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Définition. Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathscr{E}}^2$. On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le produit scalaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ calculé dans un plan contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, \cos(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition. (1) Pour tout $\vec{u} \in \vec{\mathscr{E}}$,

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2.$$

(2) Pour tout $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathscr{E}}^2$,

$$\vec{u} \perp \vec{v} \text{ si et seulement si } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

(3) Symétrie du produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

(4) Bilinéarité du produit scalaire :

$$\begin{array}{ccc} (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) & \text{et} & (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \\ \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) & \text{et} & \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \end{array}$$

Proposition. Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathscr{E}}^2$ de coordonnées $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, base orthonormée directe. On a

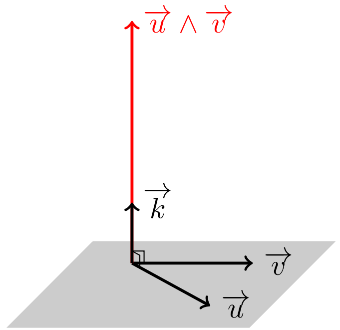
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

En particulier $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

3 Produit vectoriel dans l'espace orienté

Définition. Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathscr{E}}^2$. On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u} \wedge \vec{v}$, le vecteur :

- nul si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires,
- égal à $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\vec{u}, \vec{v})| \times \vec{k}$,
  où $\vec{k}$ est le vecteur unitaire « directement orthogonal à $(\vec{u}, \vec{v})$ », c'est-à-dire tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ constitue une base directe de $\vec{\mathscr{E}}$, sinon.



Remarque. Pour tout $\vec{u} \in \vec{\mathscr{E}}$, $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.

Exercice 3. Déterminer $\vec{i} \wedge \vec{j}$, $\vec{i} \wedge \vec{k}$, $\vec{k} \wedge \vec{j}$ et $2\vec{j} \wedge 3\vec{i}$.

Proposition. (1) Pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \vec{\mathscr{E}}^2$,

$$\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont colinéaires} \iff \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \vec{0}.$$

(2) Pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \vec{\mathscr{E}}^2$, le vecteur $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$. En particulier :

$$(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{u} = 0 \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{v} = 0.$$

(3) Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \vec{\mathscr{E}}^2$ tel que $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\| = 1$ et $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$.
Alors $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ est une base orthonormale directe de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$.

Proposition. Antisymétrie du produit vectoriel : Pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \vec{\mathscr{E}}^2$,

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}).$$

Bilinéarité du produit vectoriel : Pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in \vec{\mathscr{E}}^3$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{ccc} (\lambda\overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{v} = \lambda(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) & \text{et} & (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} \\ \overrightarrow{u} \wedge (\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) & \text{et} & \overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}. \end{array}$$

Exercice 4. Déterminer le produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{u} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\overrightarrow{v} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$.

Proposition. Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \vec{\mathscr{E}}^2$ de coordonnées respectives (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) dans $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ (orthonormée directe). Alors :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\overrightarrow{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\overrightarrow{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\overrightarrow{k}.$$

Les coordonnées de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ sont donc $\begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$.

4 Produit mixte dans l'espace orienté

Définition. L'espace étant orienté, on appelle *produit mixte* ou *déterminant des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$*, et on note $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$ le réel :

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w}$$

Remarque : Cette définition dépend de l'orientation de l'espace fixée.

Exercice 5. Déterminer $\left[\vec{i}, \vec{j}, 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}\right]$.

On remarque que :

$$\begin{aligned}
[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 0 \quad & \text{si et seulement si} \quad (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = 0 \\
& \text{si et seulement si} \quad (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \perp \overrightarrow{w} \\
& \text{si et seulement si} \quad \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont coplanaires.}
\end{aligned}$$

Proposition. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 0.$$

Proposition. Antisymétrie du produit mixte : Le produit mixte de trois vecteurs est changé en son opposé lorsqu'on échange deux vecteurs.
Par exemple,

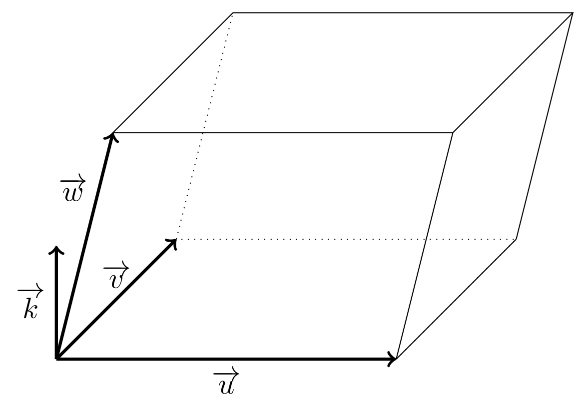
$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = -[\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}].$$

Trilinéarité du produit mixte : Pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{z}) \in \vec{\mathscr{E}}^4$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
[\lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] &= \lambda[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}], & [\overrightarrow{u} + \overrightarrow{z}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] &= [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{z}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}], \\
[\overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] &= \lambda[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}], & [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{z}, \overrightarrow{w}] &= [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{z}, \overrightarrow{w}], \\
[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \lambda\overrightarrow{w}] &= \lambda[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}], & [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} + \overrightarrow{z}] &= [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{z}].
\end{aligned}$$

Interprétation géométrique du produit mixte :

$$\boxed{|[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]| = \text{volume du parallélépipède engendré par } \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}.}$$



Démonstration.

Expression du produit mixte dans une base orthonormale directe :

Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \vec{\mathscr{E}}^3$ de coordonnées $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w}(w_1, w_2, w_3)$ dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$$\boxed{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \det_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}}$$

Le déterminant de la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est indépendant de la base orthonormée directe choisie.

Démonstration.

5 Plans et droites de $\mathscr{E}$

$\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Dans la suite, les coordonnées des points de $\mathscr{E}$ sont données dans le repère $\mathcal{R}$, et celles des vecteurs de $\vec{\mathscr{E}}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

5.1 Plans de $\mathscr{E}$

A. Définition

Définition. Soit $\mathscr{P}$ une partie de $\mathscr{E}$. On dit que $\mathscr{P}$ est un *plan de* $\mathscr{E}$ si et seulement s'il existe $A \in \mathscr{E}$ et $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathscr{E}}^2$ non colinéaires tels que $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points M vérifiant

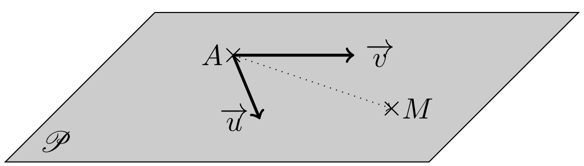
$$\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont appelés *vecteurs générateurs de* $\vec{\mathscr{P}}$.

Il existe différents modes de définition d'un plan :

1. Un point et deux vecteurs non colinéaires définissent un plan :

   Soit $A \in \mathscr{E}$ et $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathscr{E}}^2$ non colinéaires.
   Le plan $\mathscr{P}$ passant par le point A et engendré par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires :
   $$\left[\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}\right] = 0.$$

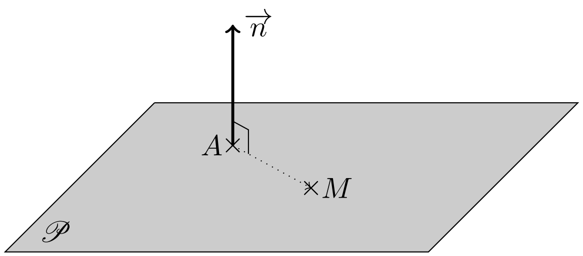


2. Un point et un vecteur normal définissent un plan :

   Soit $A \in \mathscr{E}$ et $\vec{n} \in \vec{\mathscr{E}}$ non nul.

Le plan $\mathscr{P}$ passant par le point A et orthogonal à $\overrightarrow{n}$ est l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux :

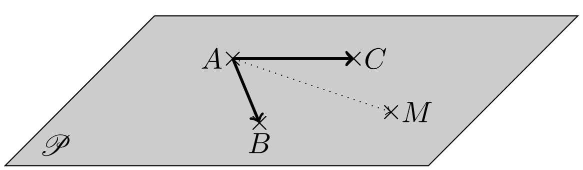
$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0.$$



3. Trois points non alignés définissent un plan :

   Soient $A, B, C \in \mathscr{E}$ non alignés.
   Le plan $\mathscr{P}$ contenant les points A, B et C, aussi noté (ABC), est l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires :

$$\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = 0.$$

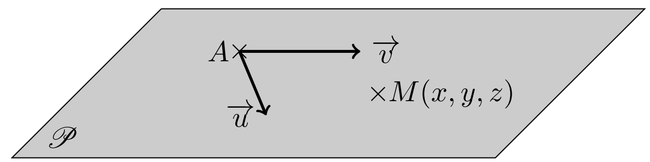


B. Représentation paramétrique d'un plan de $\mathscr{E}$

Proposition. Soient $A = (x_A, y_A, z_A)$ un point de $\mathscr{E}$ et $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires, tels que $\overrightarrow{u}(u_1, u_2, u_3)$ et $\overrightarrow{v}(v_1, v_2, v_3)$.
Le plan $\mathscr{P}$ passant par A et engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ admet comme **représentation paramétrique** :

$$\begin{cases} x = x_A + u_1\lambda + v_1\mu \\ y = y_A + u_2\lambda + v_2\mu \\ z = z_A + u_3\lambda + v_3\mu \end{cases} ;\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Réciproquement, tout système de cette forme représente un plan $\mathscr{P}$ de $\mathscr{E}$, dont on connaît un point $A = (x_A, y_A, z_A)$ et deux vecteurs générateurs : $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.



Exemple. Le système

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = 2 + \mu \end{cases} ;\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,$$

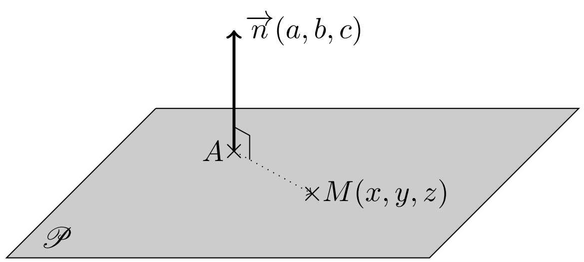
est une représentation paramétrique du plan . . .

C. Équation cartésienne d'un plan de $\mathscr{E}$

Proposition. Soit $\vec{n} = (a, b, c)$ un vecteur non nul.
Si $\mathscr{P}$ est un plan de $\mathscr{E}$ orthogonal à $\vec{n}$, alors il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que

$$ax + by + cz + d = 0$$

soit une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ dans $\mathcal{R}$. Réciproquement : soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, l'ensemble des points de $\mathscr{E}$ dont une équation est $ax + by + cz + d = 0$ est un plan orthogonal au vecteur $\vec{n} = (a, b, c)$.



Exercice 6. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par le point $A = (1, 0, -2)$, orthogonal à $\vec{n} = (1, 2, 3)$.

D. Méthodologie : « Passer d'une représentation paramétrique à une équation cartésienne »

On note $\mathscr{P}$ le plan dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = -1 + 2\lambda + \mu \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2. \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$$

Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{P}$.

E. Méthodologie : ≪ Passer d'une équation cartésienne à une représentation paramétrique ≫

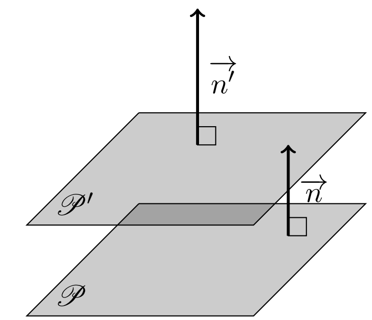
Déterminer une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ dont une équation cartésienne est $2x - y + z = 3$ dans $\mathcal{R}$.

F. Position relative de deux plans

Soit $\left(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{n'}\right) \in \vec{\mathscr{E}}^2$ non nuls. Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans de $\mathscr{E}$ tels que $\mathscr{P}$ orthogonal à $\vec{n}$ et $\mathscr{P}'$ orthogonal à $\vec{n'}$.

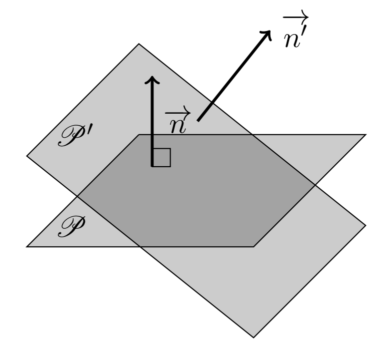
Définition. Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont *parallèles* si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires, si et seulement si

$$\vec{n} \wedge \vec{n'} = \vec{0}.$$



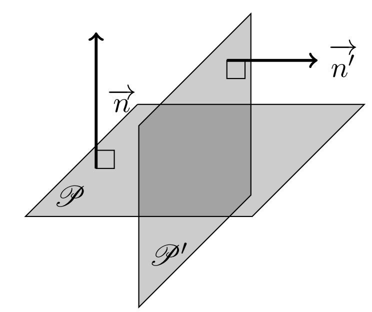
Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont *sécants* si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires, si et seulement si

$$\vec{n} \wedge \vec{n'} \neq \vec{0}.$$

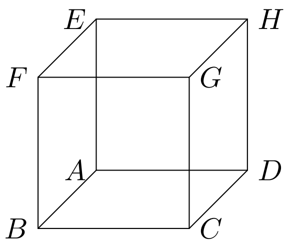


Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont *perpendiculaires* si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont orthogonaux, si et seulement si

$$\vec{n} \cdot \vec{n'} = 0.$$



Exemple. Soit $ABCDEFGH$ un cube. Les plans (ABC) et (FGH) sont parallèles. Les plans (EFG) et (BGH) sont sécants et leur intersection est la droite (GH). Les plans (ABC) et (DGH) sont perpendiculaires.



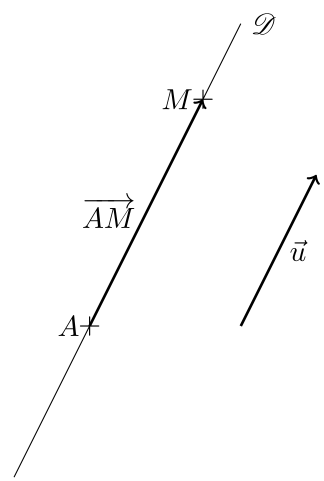
Proposition. L'intersection de deux plans de $\mathscr{E}$ est soit vide, soit une droite, soit un plan (s'ils sont confondus).

5.2 Droites de $\mathscr{E}$

Définition. Soit $\mathscr{D}$ une partie de $\mathscr{E}$. On dit que $\mathscr{D}$ est une droite si et seulement si il existe $A \in \mathscr{E}$ et $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{E}} \setminus \{\vec{0}\}$ tels que $\mathscr{D}$ est l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ vérifiant

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u}, \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas, $\mathscr{D}$ est la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$.

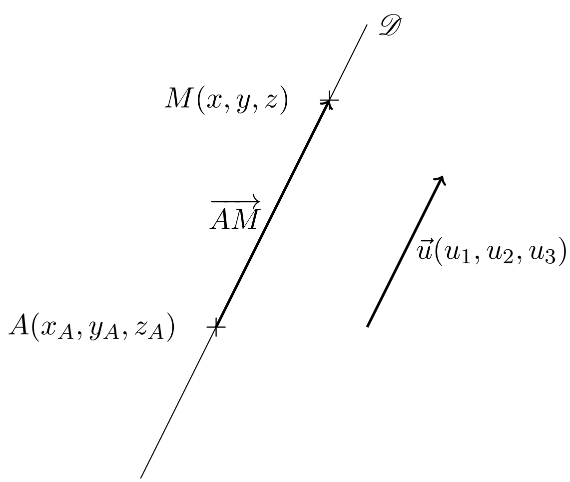


A. Représentation paramétrique d'une droite de $\mathscr{E}$

Proposition. Soient $A = (x_A, y_A, z_A)$ un point de $\mathscr{E}$ et $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ un vecteur non nul.
La droite $\mathscr{D}$ passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$ admet comme **représentation paramétrique** :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_A + u_1 t \\ y & = & y_A + u_2 t \\ z & = & z_A + u_3 t \end{array}\right. \; ; \; t \in \mathbb{R}.$$

Réciproquement, tout système de cette forme représente une droite de $\mathscr{E}$, dont on connaît un point $A = (x_A, y_A, z_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$.



B. Système d'équations cartésiennes d'une droite

Proposition. Soit $\mathscr{D}$ une droite de $\mathscr{E}$. Il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et $(a', b', c', d') \in \mathbb{R}^4$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$, tels que

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

soit un système d'équations cartésiennes de $\mathscr{D}$ dans $\mathcal{R}$.

C. Méthodologie : « Passer d'une représentation paramétrique à un système d'équations cartésiennes d'une droite »

Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite $\mathscr{D}$ passant par $A = (1, -1, 1)$ et dirigée par $\vec{u} = (1, 2, 3)$.

D. Méthodologie : ≪ Passer d'un système d'équations cartésiennes à une représentation paramétrique d'une droite ≫

Déterminer une représentation paramétrique de la droite

$$\mathscr{D} : \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 3x - z = 2 \end{cases} .$$

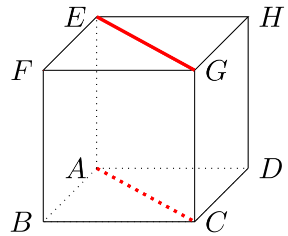
E. Position relative

Position relative de deux droites

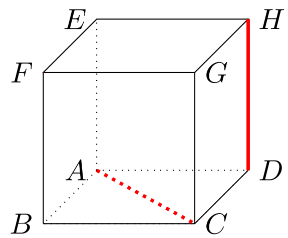
On note $\mathscr{D}$ la droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$ non nul, et $\mathscr{D}'$ la droite passant par A' et dirigée par $\overrightarrow{u}'$ non nul.

Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont :

- soit *coplanaires* $\left(\text{si } \left[\overrightarrow{AA'}, \vec{u}, \vec{u'}\right] = 0\right)$,

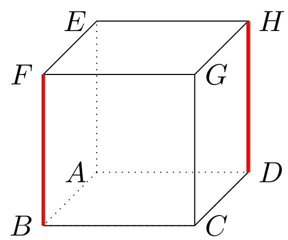


- soit *non coplanaires* $\left(\text{si } \left[\overrightarrow{AA'}, \vec{u}, \vec{u'}\right] \neq 0\right)$.]

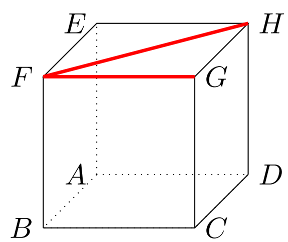


Si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont coplanaires, alors elles sont :

- soit *parallèles* $\left(\text{si } \vec{u} \wedge \vec{u'} = \vec{0}\right)$,

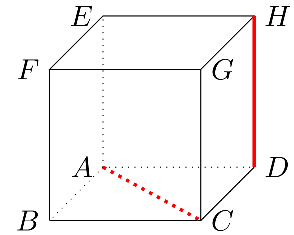


- soit *sécantes* $\left(\text{si } \vec{u} \wedge \vec{u'} \neq \vec{0}\right)$.

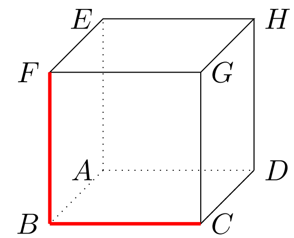


Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont dites *orthogonales* si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont orthogonaux, si et seulement si

$$\vec{u} \cdot \vec{u'} = 0.$$



Elles sont dites *perpendiculaires* si elles sont sécantes et orthogonales.



Remarque. Deux droites perpendiculaires sont orthogonales, mais la réciproque est fausse.

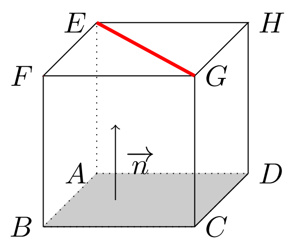
Proposition. L'intersection de deux droites de $\mathscr{E}$ est soit vide, soit un point, soit une droite (si elles sont confondues).

Position relative d'une droite et d'un plan

Soient $\mathscr{D}$ une droite de $\mathscr{E}$ de vecteur directeur $\vec{u}$ non nul et $\mathscr{P}$ un plan de $\mathscr{E}$ orthogonal à $\vec{n}$ non nul.

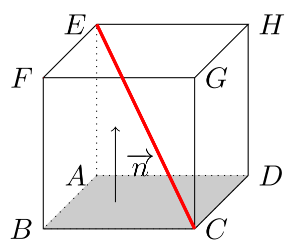
La droite $\mathscr{D}$ est *parallèle* au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si $\vec{u} \perp \vec{n}$, si et seulement si

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0.$$



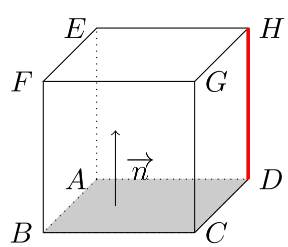
La droite $\mathscr{D}$ est *sécante* au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si

$$\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0.$$



La droite $\mathscr{D}$ est *perpendiculaire* au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, si et seulement si

$$\vec{u} \wedge \vec{n} = \vec{0}.$$



Proposition. L'intersection d'une droite et d'un plan de $\mathcal{E}$ est soit vide, soit un point, soit une droite.

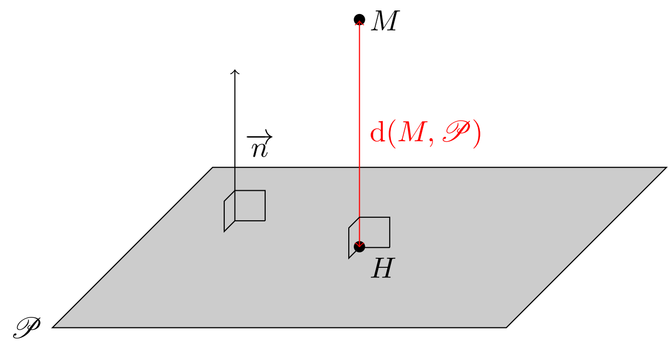
5.3 Distances et projetés orthogonaux

A. Distance d'un point à un plan de $\mathscr{E}$

Définition. Soient $\mathscr{P}$ un plan de $\mathscr{E}$ et M un point de $\mathscr{E}$. On appelle *distance du point M au plan $\mathscr{P}$* et on note $\mathrm{d}(M, \mathscr{P})$ la plus petite distance entre M et un point de $\mathscr{P}$. Le théorème de Pythagore assure que

$$\mathrm{d}(M, \mathscr{P}) = MH,$$

où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$.



Théorème. Soient $\mathscr{P}$ un plan de $\mathscr{E}$ d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et $M = (x_M, y_M, z_M)$ un point de $\mathscr{E}$. Alors :

$$\mathrm{d}(M, \mathscr{P}) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Exemple. Déterminer la distance du point $M = (1, 2, 3)$ au plan $\mathscr{P} : x + 2z - 5 = 0$.

B. Méthodologie : « Déterminer le projeté orthogonal d'un point sur un plan »

Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point $M = (1, 2, 3)$ sur le plan $\mathscr{P} : x + 2z - 5 = 0$.

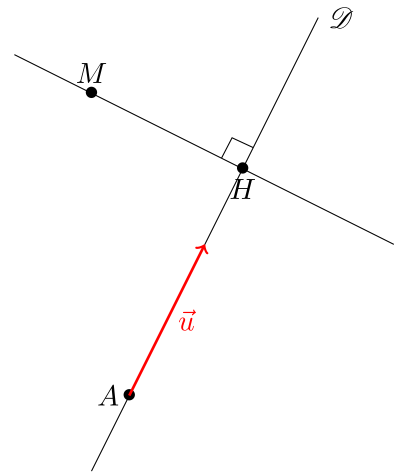
C. Distance d'un point à une droite de $\mathscr{E}$

On considère la droite $\mathscr{D}$ de $\mathscr{E}$ passant par A et dirigée par $\vec{u}$ non nul.

Soit $M \in \mathscr{E}$. On rappelle que la distance du point M à la droite $\mathscr{D}$, notée $\mathrm{d}(M, \mathscr{D})$, est la plus petite distance entre M et un point de $\mathscr{D}$ et donc que

$$\mathrm{d}(M, \mathscr{D}) = MH,$$

où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$.



On a $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}$. Donc $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \wedge \vec{u} = \overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}$ et $\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\| = \|\overrightarrow{HM}\| \|\vec{u}\|$. D'où

$$\boxed{\mathrm{d}(M, \mathscr{D}) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.}$$

Exemple. Déterminer la distance du point $M = (1, 0, 1)$ à la droite $\mathscr{D}$ passant par $A = (1, -1, 1)$ et dirigée par $\vec{u} = (1, 2, 3)$.

D. Méthodologie : « Déterminer le projeté orthogonal d'un point sur une droite »

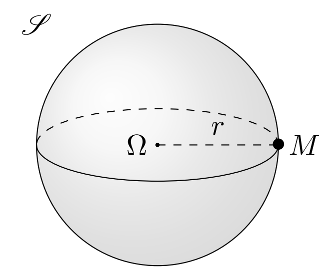
Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point $M = (1, 0, 1)$ sur la droite $\mathscr{D}$ passant par $A = (1, -1, 1)$ et dirigée par $\vec{u} = (1, 2, 3)$.

6 Sphères

$\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Définition. Soient $\Omega \in \mathscr{E}$ et r un réel strictement positif. On appelle *sphère de centre* Ω *et de rayon* r l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que

$$\Omega M = r.$$



6.1 Équation cartésienne d'une sphère

Proposition. Soient $\Omega \in \mathscr{E}$ et r un réel strictement positif. On note (a, b, c) les coordonnées de Ω dans $\mathcal{R}$. Une équation cartésienne de la sphère $\mathscr{S}$ de centre Ω et de rayon r est :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2.$$

Proposition. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0.$$

Alors $\mathcal{A}$ est une sphère, un point ou le vide.

Exercice 7. Décrire l'ensemble $\mathcal{A}$ des points de $\mathscr{E}$ dont une équation cartésienne est :

1. $\mathcal{A} \ : \ x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 20 = 0.$
2. $\mathcal{A} \ : \ x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z + 3 = 0.$
3. $\mathcal{A} \ : \ x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y + \frac{5}{2} = 0.$

6.2 Sphère définie par son diamètre

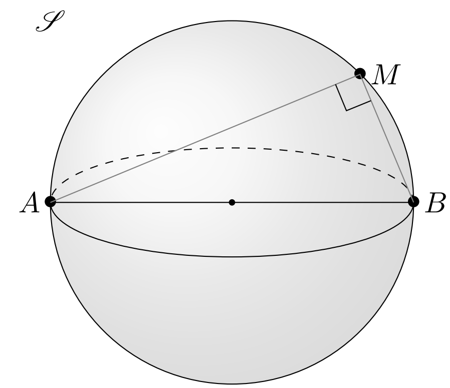
Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points distincts de $\mathscr{E}$.

Proposition. On considère $\mathscr{S}$ la sphère de diamètre $[AB]$. Soit $M \in \mathscr{E}$:

$$M \in \mathscr{S} \iff \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

Une équation cartésienne de la sphère $\mathscr{S}$ est donc

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0.$$



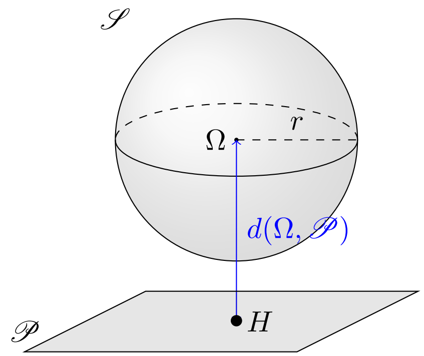
Exemple. Soient A et B deux points de $\mathscr{E}$ de coordonnées $(0, -1, 1)$ et $(-2, 1, 1)$. Déterminer une équation cartésienne de la sphère $\mathscr{S}$ de diamètre $[AB]$.

6.3 Intersection d'une sphère et d'un plan

Proposition. Soient $\Omega \in \mathscr{E}$ et $r > 0$. On appelle $\mathscr{S}$ la sphère de centre Ω et de rayon r. Soit $\mathscr{P}$ un plan de $\mathscr{E}$.
On note H le projeté du point Ω sur le plan $\mathscr{P}$.

Si $d(\Omega, \mathscr{P}) > r$, alors

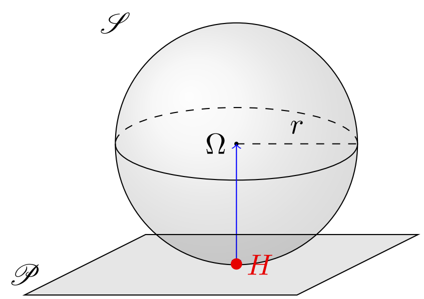
$$\mathscr{S} \cap \mathscr{P} = \emptyset \ ;$$



Si $d(\Omega, \mathscr{P}) = r$, alors

$$\mathscr{S} \cap \mathscr{P} = \{H\}$$

où H est le projeté orthogonal de Ω sur $\mathscr{P}$.



Si $d(\Omega, \mathscr{P}) < r$, alors

$$\mathscr{S} \cap \mathscr{P} = \mathscr{C},$$

où $\mathscr{C}$ est le cercle inclus dans $\mathscr{P}$ de centre H et de rayon $\sqrt{r^2 - d(\Omega, \mathscr{P})^2}$.