Chapitre 12 : Ensembles et dénombrement

Un chapitre, un mathématicien

Georg Cantor
(1845-1918)

Il fallait probablement être un peu fou pour pouvoir imaginer que tous les ensembles infinis n'ont pas le même nombre d'éléments, pour définir des entiers infinis, les ordonner, et même les additionner. Georg Cantor était ce fou-là, et ses idées révolutionnaires n'ont pas manqué de détracteurs.

En 1874 paraît au Journal de Crelle une note de quatre pages où Georg Cantor, alors âgé de vingt-neuf ans et jeune professeur à l'université de Halle, établit la dénombrabilité de l'ensemble des nombres algébriques et la non-dénombrablité de l'ensemble des nombres réels. Cet article est révolutionnaire car, pour la première fois, l'infini est considéré non plus comme une limite inatteignable mais comme un possible objet d'investigation. L'héritage de ce travail est extraordinaire : non seulement il marque la naissance de la théorie des ensembles — en fait une théorie de l'infini — mais il contient déjà en germe le problème du continu qui a occupé toute la fin de la vie de Cantor et a été et continue d'être le moteur du développement de cette théorie.

Suggestion de lecture : *Cantor et les infinis* - Patrick Dehornoy - Bibnum : `http://journals.openedition.org/bibnum/890`

Deux infinis différents sont en fait de même taille – Kevin Hartnett – Pour la Science – 23/10/2017

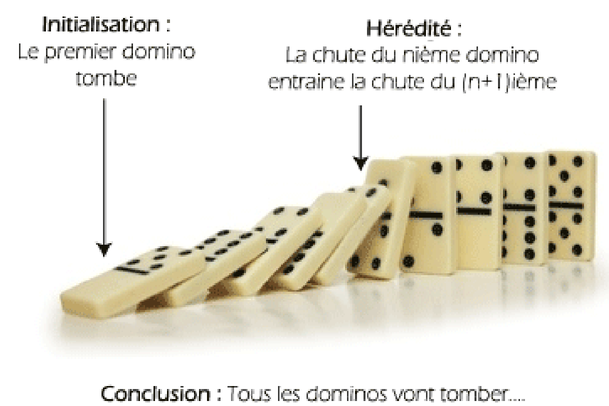
1 Récurrences

1.1 Principe de récurrence

On introduit pour tout $n \in \mathbb{N}$, une assertion P_n.
Si :

- P_0 est vraie *(Initialisation)*
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ *(Hérédité)*

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.



Rédaction

Étapes	Rédaction
On introduit P_n	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose P_n : ...
On vérifie P_0	P_0 est vraie car ...
On vérifie $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n \Rightarrow P_{n+1}$	Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n est vraie ... donc P_{n+1} est vraie.
Conclusion	Le principe de récurrence assure que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \dots}$

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle telle que $u_0 = 2$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - n$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + n + 1$.

Remarque. Soit $n_0 \in \mathbb{N}^\star$. On peut démontrer qu'une propriété P_n est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$ de la façon suivante :

Étapes	Rédaction
On introduit P_n	Pour tout entier $n \geqslant n_0$, on pose $P_n :\ \ldots$
On vérifie P_{n_0}	P_{n_0} est vraie car ...
On vérifie $\forall n \geqslant n_0,\ P_n \Rightarrow P_{n+1}$	Soit $n \geqslant n_0$ tel que P_n est vraie ... donc P_{n+1} est vraie.
Conclusion	Le principe de récurrence assure que $\boxed{\text{pour tout entier } n \geqslant n_0,\ \ldots}$

Exercice 2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 4$, $n! \geqslant n^2$.

1.2 Autres schémas de récurrence

A. Récurrence finie

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrer que pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, P_p est vraie.

Étapes	Rédaction
On introduit P_p	Pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, on pose P_p : ...
On vérifie P_0	P_0 est vraie car ...
On vérifie que $\forall p \in [\![0, n-1]\!],\ P_p \Rightarrow P_{p+1}$	Soit $p \in [\![0, n-1]\!]$ tel que P_p est vraie ... donc P_{p+1} est vraie.
Conclusion	Le principe de récurrence assure que $\boxed{\text{pour tout } p \in [\![0, n]\!],\ \ldots}$

Exercice 3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^{10}$.
Montrer que pour tout $p \in [\![0, 10]\!]$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(p)}(x) = \frac{10!}{(10-p)!} x^{10-p}.$$

B. Récurrence double

Étapes	Rédaction
On introduit P_n	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n :$ ...
On vérifie P_0 et P_1	P_0 et P_1 sont vraies car ...
On vérifie que $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n$ et $P_{n+1} \Rightarrow P_{n+2}$	Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n et P_{n+1} sont vraies ... donc P_{n+2} est vraie.
Conclusion	Le principe de récurrence assure que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \dots}$

Exercice 4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \text{ et } u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n. \end{cases}$$

Conjecturer et démontrer l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

C. Récurrence forte

Étapes	Rédaction
On introduit P_n	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n :$ ...
On vérifie P_0	P_0 est vraie car ...
On vérifie que $\forall n \in \mathbb{N},\ P_0, P_1, \ldots, P_n \Rightarrow P_{n+1}$	Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P_0, P_1, \ldots, P_n$ sont vraies ... donc P_{n+1} est vraie.
Conclusion	Le principe de récurrence assure que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \ \ldots}$

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

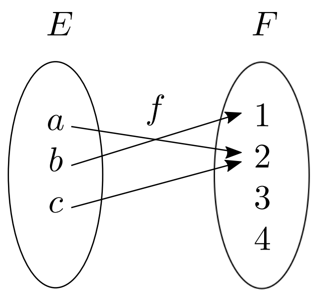
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_0 + \cdots + u_n. \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{N}$.

2 Applications

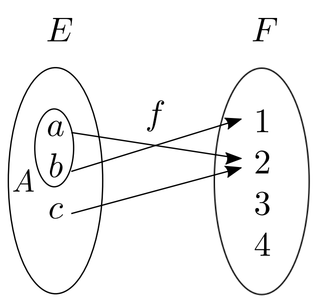
Définition 1. (Application) Soient E et F deux ensembles.
Une **application f de E dans F** est une relation qui associe à tout élément de E un unique élément de F :

$$f : E \to F.$$



Définition 2. (Image directe - Image réciproque)
Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Soient $A \subset E$ et $B \subset F$.
On appelle **image directe de A par f** et on note $\boldsymbol{f(A)}$ l'ensemble des images par f des éléments de A :

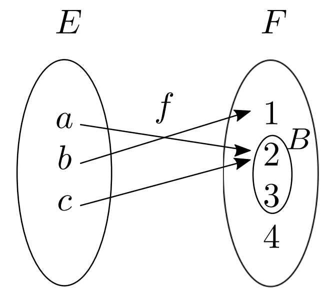
$$\boxed{f(A) = \{f(x) \,|\, x \in A\}\,.}$$



Ici $A = \{a, b\}$ et $f(A) = \{1, 2\}$.

On appelle **image réciproque de B par f** et on note $\boldsymbol{f^{-1}(B)}$ l'ensemble des antécédents par f des éléments de B :

$$\boxed{f^{-1}(B) = \{x \in E \,|\, f(x) \in B\}\,.}$$



Ici $B = \{2, 3\}$ et $f^{-1}(B) = \{a, c\}$.

Remarquons que $f(A) \subset F$ et $f^{-1}(B) \subset E$.

Exercice 6. Soient $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$, $\quad A = [-1, 1] \quad$ et $\quad B = [0, 2]$.
Déterminer $f(A)$ et $f^{-1}(B)$.

Définition 3. (Injection - Surjection - Bijection)
L'application $f : E \to F$ est dite **injective** si tout élément de F admet au plus un antécédent par f :

$$\forall (x_1, x_2) \in E \times E,\ f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2.$$

L'application $f : E \to F$ est dite **surjective** si tout élément de F admet au moins un antécédent par f :

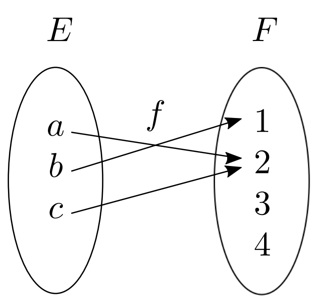
$$\forall y \in F,\ \exists\, x \in E,\ f(x) = y.$$

L'application $f : E \to F$ est dite **bijective** si tout élément de F admet exactement un antécédent par f :

$$\forall y \in F,\ \exists!\, x \in E,\ f(x) = y.$$

Remarque. Une application est bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective.

Exemple. L'application précédente n'est pas injective par 2 admet deux antécédents par f : a et b. Elle n'est pas surjective car 3 n'admet pas d'antécédent par f.



Définition 4. (Application identité) Soit E un ensemble.

On note Id_E et on appelle application identité de E l'application :

$$\mathrm{Id}_E : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array}.$$

3 Les ensembles finis

3.1 Présentation

L'idée de base du problème est simple : on dit qu'un ensemble E est **fini** lorsqu'il est vide ou que l'on peut compter ses éléments, c'est-à-dire établir une bijection entre E et une partie de $\mathbb{N}$ de la forme $\{1, \dots, n\}$, avec $n \in \mathbb{N}^\star$. Cette partie, notée $[\![1, n]\!]$, correspond aux numéros des éléments de E.

Définition 5. Soit E un ensemble non vide.
On dit que E est **fini** si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ et une bijection entre E et $[\![1, n]\!]$.
Si E est fini, l'unique entier naturel non nul n tel qu'il existe une bijection entre E et $[\![1, n]\!]$ est appelé **cardinal de E** et noté **Card(E).**
Par convention, l'ensemble vide est dit fini de cardinal 0.
Notations : $\mathrm{Card}(E)$, $|E|$, $\#E$.

Théorème 1. *Soient E et F deux ensembles **finis de même cardinal**. Soit f une application de E dans F.*
Alors :

$$\begin{aligned} f \text{ est } \textbf{injective} \quad & \text{si et seulement si} \quad f \text{ est } \textbf{surjective} \\ & \text{si et seulement si} \quad f \text{ est } \textbf{bijective}. \end{aligned}$$

3.2 Opérations sur les ensembles finis et cardinaux

Dans cette partie, E désigne un ensemble fini à n éléments :

$$\mathrm{Card}(E) = n.$$

A. Partie d'un ensemble fini

Définition 6. On dit que F est **inclus** dans E, et on note $F \subset E$, si tout élément de F est élément de E :

$$\forall x \in F,\ x \in E.$$

On dit aussi que F est un **sous-ensemble** ou une **partie** de E.

Théorème 2. *Si $F \subset E$, alors*

$$\mathrm{Card}(F) \leqslant \mathrm{Card}(E).$$

Si $F \subset E$ et $\mathrm{Card}(F) = \mathrm{Card}(E)$, alors $F = E$.

B. Intersection

Définition 7. On appelle **intersection** de deux ensembles A et B, et on note $A \cap B$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B :

$$x \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B.$$

Deux ensembles A et B sont dits **disjoints** lorsque leur intersection est vide :

$$A \text{ et } B \text{ disjoints } \Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset.$$

Dans ce cas, la réunion de A et de B est notée $A \sqcup B$.

Théorème 3. *Soient $A, B \subset E$.*
Alors l'ensemble $A \cap B$ est fini et

$$\mathrm{Card}(A \cap B) \leqslant \min\left(\mathrm{Card}(A), \mathrm{Card}(B)\right).$$

C. Union

Définition 8. On appelle **union** de deux ensembles A et B, et on note $A \cup B$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B :

$$x \in A \cup B \Longleftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B.$$

Union disjointe

Théorème 4. *Soient $A, B \subset E$ deux parties disjointes de E :*

$$A \cap B = \emptyset.$$

Alors l'ensemble $A \sqcup B$ est fini et

$$\mathrm{Card}(A \sqcup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B).$$

Remarque. Soient E un ensemble et $A_1, \ldots, A_n$ n parties finies de E, deux à deux disjointes. Alors l'ensemble $A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n$ est fini et

$$\mathrm{Card}(A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n) = \mathrm{Card}(A_1) + \cdots + \mathrm{Card}(A_n).$$

Union quelconque

Théorème 5. ***(Formule du crible)*** *Soient $A, B \subset E$. Alors l'ensemble $A \cup B$ est fini et*

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

Exercice 7. Déterminer le cardinal de l'union de trois parties finies A, B et C d'un ensemble E.

D. Complémentaire

Définition 9. Soit $A \subset E$. On appelle complémentaire de A dans E et on note $\complement_E A$, $E \setminus A$ ou $\bar{A}$, l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A :

$$x \in E \setminus A \Longleftrightarrow x \in E \text{ et } x \notin A.$$

Théorème 6. *Soit $A \subset E$. Alors l'ensemble $E \setminus A$ est fini et*

$$\mathrm{Card}(E \setminus A) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A).$$

E. Produit cartésien

Définition 10. Soient E et F deux ensembles. On appelle **produit cartésien de $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{F}$**, et on note $E \times F$, l'ensemble des couples (x, y) tels que x est élément de E et y élément de F :

$$(x, y) \in E \times F \Longleftrightarrow x \in E \text{ et } y \in F.$$

Remarque. Cette définition se généralise par récurrence. On peut alors définir le produit cartésien de n ensembles $E_1, E_2 \ldots, E_n$:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \Leftrightarrow x_1 \in E_1 \text{ et } x_2 \in E_2 \text{ et } \ldots\ x_n \in E_n.$$

On notera E^n l'ensemble $\underbrace{E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}}$.

Théorème 7. *Si E et F sont deux ensembles finis, alors $E \times F$ est fini et*

$$\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F).$$

F. Ensemble des parties d'un ensemble fini

Définition 11. Tous les sous-ensembles d'un ensemble E constituent un nouvel ensemble appelé **ensemble des parties de $\boldsymbol{E}$**, et noté $\mathscr{P}(\boldsymbol{E})$:

$$\mathscr{P}(E) = \{F \mid F \subseteq E\}.$$

Exemple. Soit $E = \{a, b, c\}$. Déterminer $\mathscr{P}(E)$.

Théorème 8. *Si E est un ensemble fini, alors l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ est fini et*

$$\mathrm{Card}(\mathscr{P}(E)) = 2^n,$$

où $n = \mathrm{Card}(E)$.

4 Dénombrement

Dans cette partie, E désigne un ensemble fini à n éléments :

$$\mathrm{Card}(E) = n.$$

4.1 p-uplets ou p-listes d'un ensemble fini

Définition 12. (p-listes / p-uplet) Soit $p \in \mathbb{N}^\star$.

Une ***p*-liste** ou ***p*-uplet d'éléments de *E*** est une suite de p éléments ordonnés de E. Une p-liste induit donc une notion d'ordre.

Un 2-uplet d'éléments de E est appelé **couple** d'éléments de E.
Un 3-uplet d'éléments de E est appelé **triplet** d'éléments de E.

Remarque. Une p-liste de E est un élément de E^p.

Exemple. Énumérer tous les triplets de $E = \{a, b, c, d\}$.

Théorème 9. *Soit $p \in \mathbb{N}^\star$. Le nombre de p-listes d'éléments de E est égal à*

$$\boxed{n^p}$$

Exercice 8.

1. On lance trois fois un dé en notant, dans l'ordre, la valeur obtenue à chaque lancer. Combien y a-t-il de résultats possibles ?
2. Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9. Combien y a-t-il de codes possibles ?

4.2 p-listes d'éléments distincts de E

Exemple. Énumérer tous les triplets d'éléments distincts de $E = \{a, b, c, d\}$.

Théorème 10. *Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leqslant n$. Le nombre de p-listes d'éléments **distincts** de E est égal à*

$$\boxed{\frac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}$$

Exercice 9.

1. Une course oppose 20 concurrents. Combien y a-t-il de podiums possibles ?
2. Un comité est constitué d'un président, d'un vice-président, d'un trésorier et d'un secrétaire. Combien peut-on élire de comités dans une association de 30 membres ?

4.3 Permutations d'un ensemble fini

Définition 13. (Permutation) Soit E un ensemble fini.
On appelle **permutation de E** toute bijection de E dans lui-même.

Remarque. Une permutation de E est une n-liste de E.

Exemple. Énumérer toutes les permutations de $E = \{a, b, c\}$.

Théorème 11. *Le nombre de permutations de E est égal à*

$$\boxed{n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1}$$

Exercice 10.
1. Combien y a-t-il de classements possibles à l'issue d'une épreuve sportive qui oppose 10 athlètes ?
2. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot « LISTE » ?

4.4 Parties d'un ensemble fini

Exercice 11. Énumérer toutes les parties à 0,1,2,3,4 éléments de $E = \{a, b, c, d\}$.

Théorème 12. *Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leqslant n$.*
Le nombre de parties à p éléments de E est égal à

$$\boxed{\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}.$$

Notation : Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leqslant n$, on note $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.
$\binom{n}{p}$ se lit « p parmi n ».

Exercice 12.

1. Combien y a-t-il de mains de 5 cartes possibles avec un jeu de 32 cartes ?
2. Combien y a-t-il de poignées de main échangées dans un groupe de 10 personnes (toutes les personnes du groupe se saluant de cette façon) ?

Proposition 1. *Soit* $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ *tel que* $p \leqslant n$,

$$\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.}$$

Proposition 2. *Soit* $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\boxed{\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n.}$$

Proposition 3. *(Formule de Pascal) Soit* $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ *tel que* $p \leqslant n-1$,

$$\boxed{\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}.}$$

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Triangle de Pascal

Théorème 13. *(Formule du binôme de Newton) Pour tout* $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.}$$