Chapitre 14 : Suites réelles

1 Généralités sur les suites réelles

Définition 1. On appelle *suite réelle* une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une suite réelle. On note u_n l'image par u de l'entier n, à la place de $u(n)$. La suite u de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est alors notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Par extension, on appelle également suite réelle une application de $[\![n_0, +\infty[\![$.

1.1 Modes de définition d'une suite

Une suite réelle peut être définie de différentes façons :

Par une formule explicite On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n + 1$.

Par récurrence On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

1.2 Opérations

L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est muni deux lois internes (addition et produit) et d'une loi externe (multiplication par un réel) :

Pour toutes suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{lcl} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} & = & (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \times (v_n)_{n\in\mathbb{N}} & = & (u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ \lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} & = & (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

Exemple. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \quad \text{et} \quad v_n = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right).$$

Déterminer le terme général de la suite $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Commenter le résultat.

1.3 Monotonie, stricte monotonie

Définition 2. On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

1. *croissante* si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} \geqslant u_n.$$
2. *décroissante* si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} \leqslant u_n.$$
3. *monotone* si et seulement si elle est croissante ou décroissante.
4. *strictement croissante* si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} > u_n.$$
5. *strictement décroissante* si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} < u_n.$$
6. *strictement monotone* si et seulement si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Méthodologie : Sens de variation d'une suite

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{n+1}$. Déterminer le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour étudier le sens de variation d'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement positive, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1.

Proposition 1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que :*
$$\textit{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n > 0.$$
Alors :

• $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante (resp. strictement croissante) si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \quad \left(\textit{resp. } \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1\right).$$
• $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante (resp. strictement décroissante) si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1 \quad \left(\textit{resp. } \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1\right).$$

Méthodologie : Sens de variation d'une suite

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$. Déterminer le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.4 Suites minorées, majorées, bornées

Définition 3. On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

1. *majorée* si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n \leqslant M.$$
2. *minorée* si et seulement s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n \geqslant m.$$
3. *bornée* si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_n| \leqslant M,$$
ce qui est équivalent à dire qu'elle est à la fois majorée et minorée.

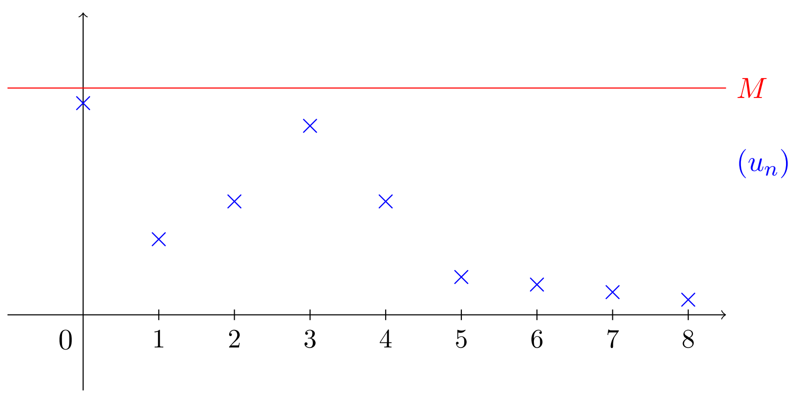


Illustration : « (u_n) est majorée »

Exemple. La suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant 1.$$

Proposition 2. *Si une suite réelle est majorée (resp. minorée, bornée) à partir d'un certain rang, alors elle est majorée (resp. minorée, bornée).*

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n\sin(n)}{1+n^2}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

1.5 Suites arithmétiques et géométriques

Soient r et q deux réels.

	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite arithmétique de raison r
Définition	
Expression de u_n en fonction de n	
Somme des $n+1$ premiers termes : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$	

	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite géométrique de raison q
Définition	
Expression de u_n en fonction de n	
Somme des $n+1$ premiers termes : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$	

2 Limite d'une suite réelle

2.1 Limite finie ou infinie d'une suite

Définition 4. (Limite finie) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ si et seulement si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ vérifiant } n \geqslant n_0, \quad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Notation : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

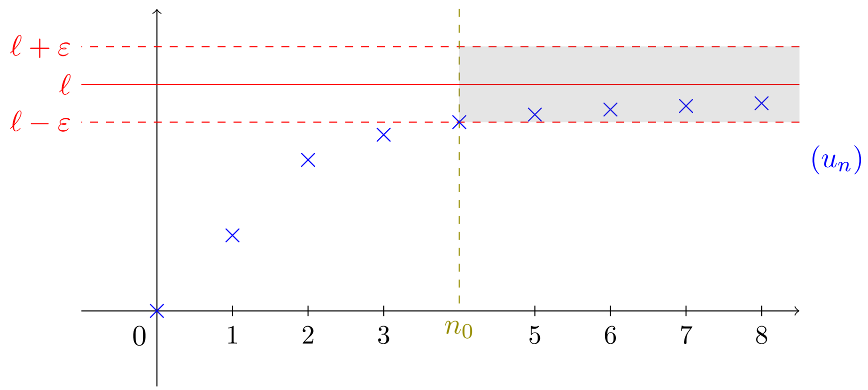


Illustration : « $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ »

Exercice 4. Montrer que la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Définition 5. (Limite infinie) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge vers* $+\infty$ si et seulement si quel que soit le réel M, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à M :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ vérifiant } n \geqslant n_0, \quad u_n \geqslant M.$$

Notation : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge vers* $-\infty$ si et seulement si quel que soit le réel M, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont inférieurs à M :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ vérifiant } n \geqslant n_0, \quad u_n \leqslant M.$$

Notation : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

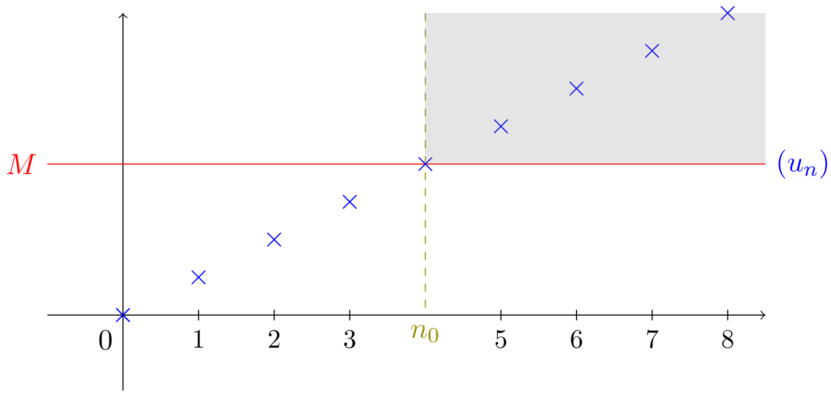


Illustration : « $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ »

Exercice 5. Montrer que la suite $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Définition 6. (Suite convergente / divergente)
Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *convergente* si elle admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$.
Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *divergente* si elle n'est pas convergente.
Il y a trois types de suites divergentes : les suites qui n'admettent pas de limite, celles qui divergent vers $+\infty$ et celles qui divergent vers $-\infty$.

2.2 Théorèmes

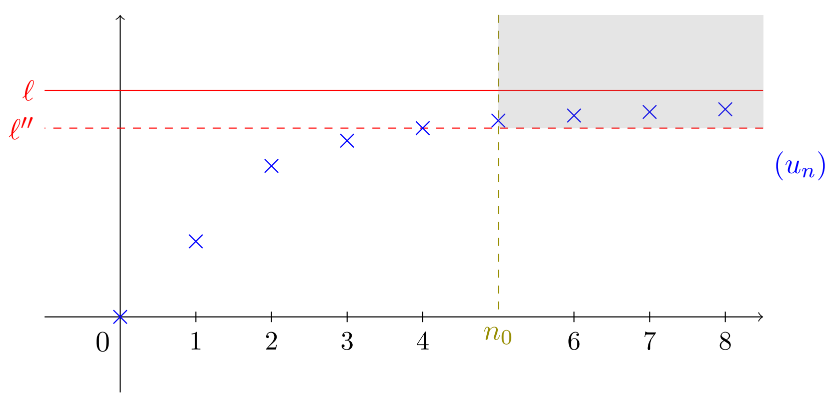
Théorème 1. ***(Unicité de la limite)***
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une limite (finie ou infinie), alors cette limite est unique.*

Théorème 2. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle qui converge vers un réel* ℓ. *Soit* $\ell' > \ell$. *Tous les termes de la suite sont strictement inférieurs à* ℓ' *à partir d'un certain rang :*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ vérifiant } n \geqslant n_0, \quad u_n < \ell'.$$

Soit $\ell'' < \ell$. *Tous les termes de la suite sont strictement supérieurs à* ℓ'' *à partir d'un certain rang :*

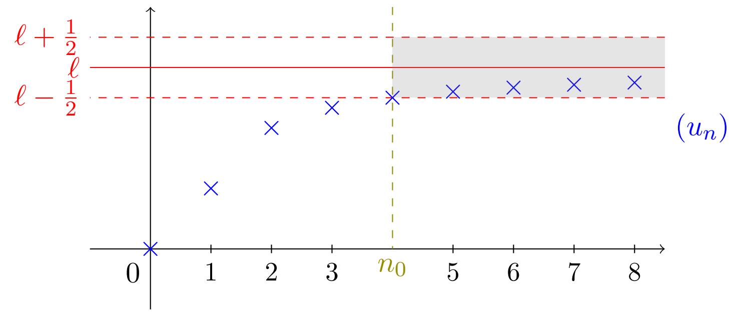
$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ vérifiant } n \geqslant n_0, \quad u_n > \ell''.$$



Théorème 3. *Toute suite réelle convergente est bornée.*

Remarque. 1. La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente, car elle n'est pas bornée.
2. La réciproque du théorème précédent est fausse : la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, mais n'est pas convergente.

Démonstration.



Théorème 4. ***(Passage à la limite dans une inégalité)***
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes, telles que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n.$$

Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Remarque. /!\ Cas des inégalités strictes :

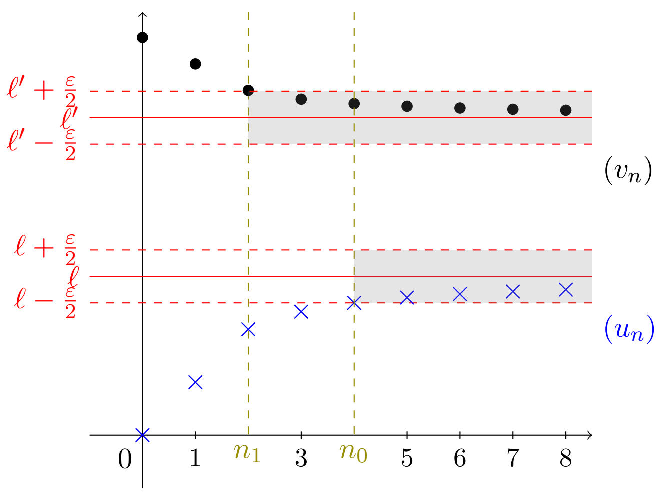
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2+n^2}$ et $v_n = \frac{1}{1+n^2}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$, mais $\lim u_n \leqslant \lim v_n$.

2.3 Opérations sur les limites

A. Une démonstration

Théorème 5. ***(Limite d'une somme)***
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers $\ell' \in \mathbb{R}$.
Alors la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell + \ell'$.

Démonstration. *Soit* $\varepsilon > 0$.



Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites admettant des limites (finies ou infinies).

B. Limite de $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Le tableau suivant indique la limite de la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, lorsqu'elle existe :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \in \mathbb{R}$			
$+\infty$			
$-\infty$			

C. Limite de $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Le tableau suivant indique la limite de la suite $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, lorsqu'elle existe :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' > 0$					
$\ell' < 0$					
0					
$+\infty$					
$-\infty$					

D. Limite de $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

On suppose que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. Le tableau suivant indique la limite de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, lorsqu'elle existe :

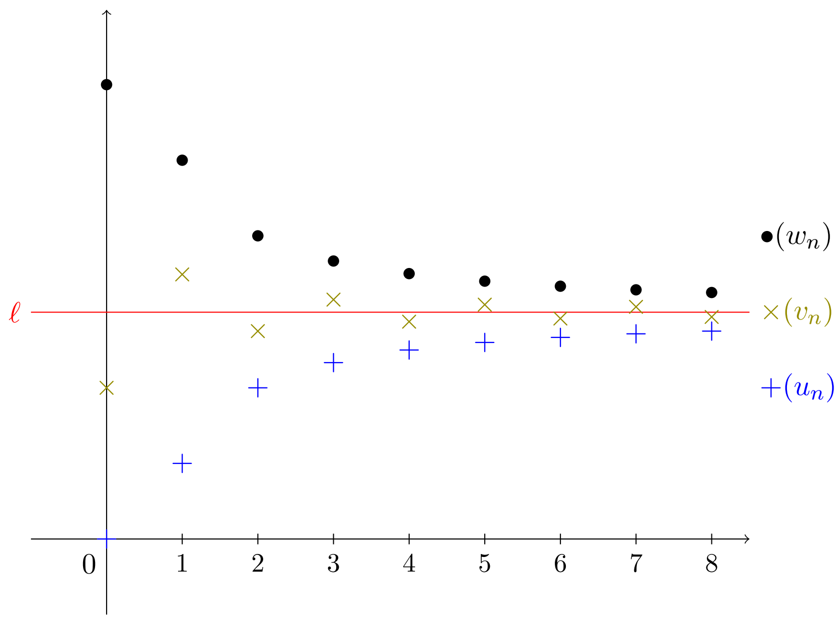
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' > 0$					
$\ell' < 0$					
0^- ($v_n < 0$ à partir d'un certain rang)					
0^+ ($v_n > 0$ à partir d'un certain rang)					
$+\infty$					
$-\infty$					

3 Théorème d'existence d'une limite

Théorème 6. ***(Théorème d'encadrement)***
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n.$$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

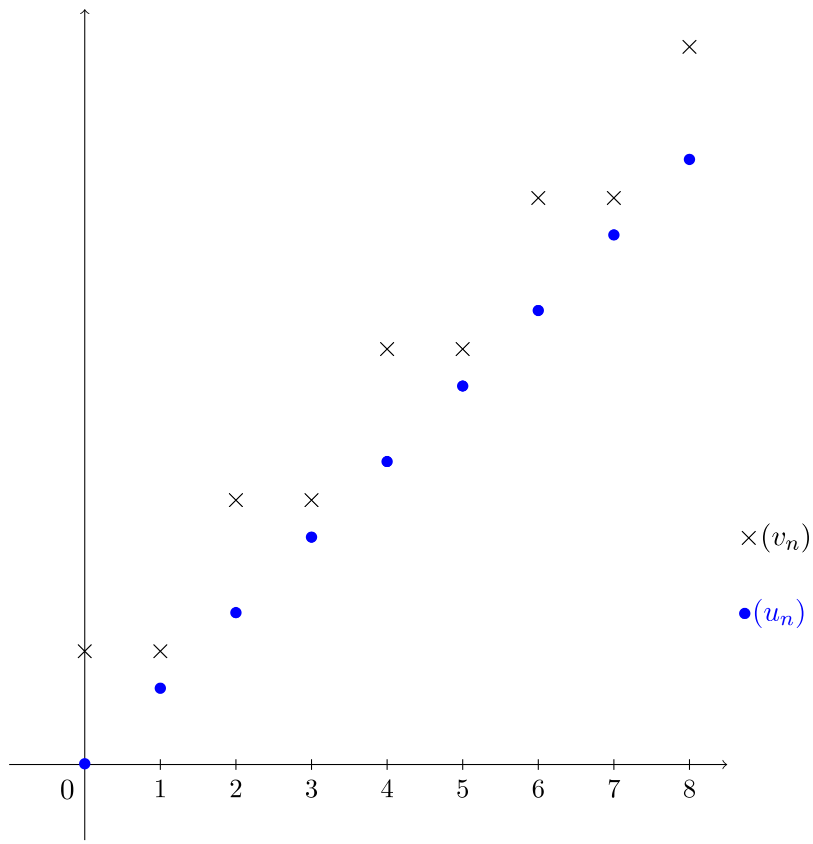


Exercice 6. Déterminer la limite de $\left(\frac{\sin n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème 7. ***(Théorème de comparaison)***
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n.$$

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.



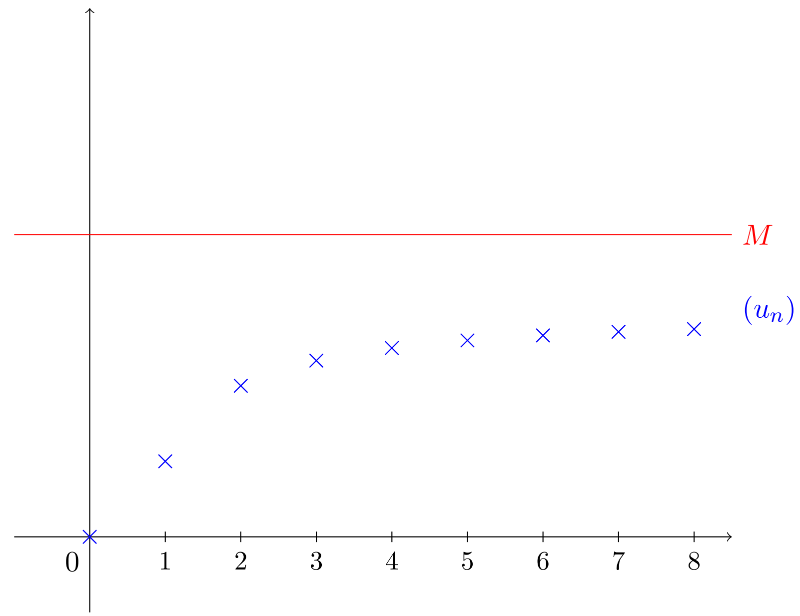
Exercice 7. Déterminer la limite de $(n+(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème 8. ***(Théorème de la limite monotone)***
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle croissante (à partir d'un certain rang).

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors elle est convergente.
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante (à partir d'un certain rang).

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, alors elle est convergente.
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée, alors elle diverge vers $-\infty$.



Exercice 8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_0=-2$ et $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+3$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 6.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Que peut-on en déduire ?
3. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.1 Limites de $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Théorème 9. ***(Limites de*** $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$***)***
Soit $q \in \mathbb{R}$. *Dans ce cas,*

Si $|q| < 1$, *alors* $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers 0 :* $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Si $q > 1$, *alors* $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge vers* $+\infty$ *:* $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Si $q \leqslant -1$, *alors* $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'admet pas de limite.*

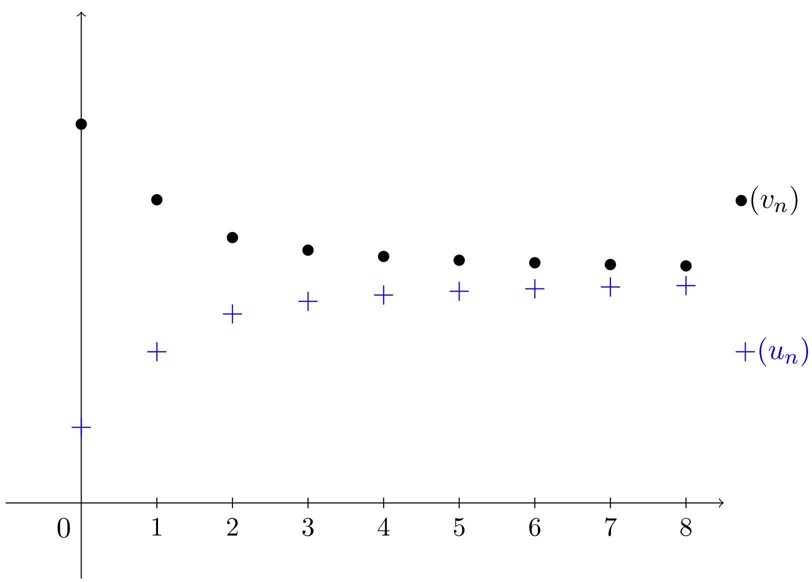
Si $q = 1$, *alors* $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est constante égale à 1 :* $\forall n \in \mathbb{N},\ q^n = 1$.
En particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.

Exemple. La suite $\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Les suites $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\left(\frac{5}{4}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent : la première n'admet pas de limite et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n = +\infty$.

4 Suites adjacentes

Définition 7. (Suites adjacentes)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si et seulement si :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,
2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
3. la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

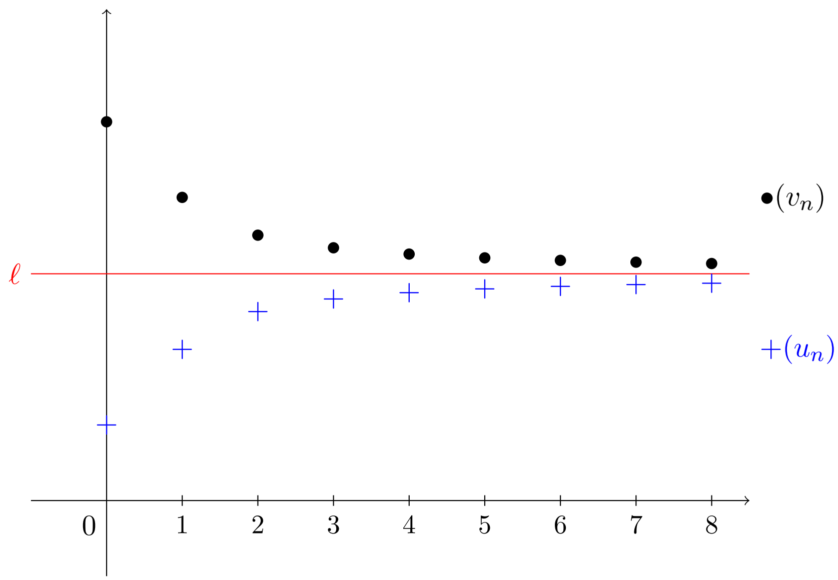


Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 9. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ deux suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = \frac{n-1}{n}$ et $v_n = \frac{n+1}{n}$. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

Théorème 10. *Deux suites adjacentes* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent vers une limite commune* ℓ *vérifiant*

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \ell \leqslant v_n.$$



Remarque. Soit $n \in \mathbb{N}$, u_n est une valeur approchée (par défaut) de ℓ avec une erreur inférieure à $v_n - u_n$. De même, v_n est une valeur approchée (par excès) de ℓ avec une erreur inférieure à $v_n - u_n$.

Démonstration.

5 Suites extraites

Définition 8. Une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée *suite extraite*, ou *sous-suite*, d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante, vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{\varphi(n)}.$$

Exemple. 1. La suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème 11. *Si une suite possède une limite (finie ou infinie), alors ses suites extraites possèdent la même limite.*

Remarque. On utilise surtout ce théorème pour montrer qu'une suite n'admet pas de limite en exhibant deux sous-suites convergeant vers des limites différentes.

MÉTHODOLOGIE : MONTRER QU'UNE SUITE N'ADMET PAS DE LIMITE.

Exercice 10. Montrer que la suite $u_n = (-1)^n$ est divergente.

6 Comparaisons de suites

6.1 Suite dominée par une autre

Définition 9. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *dominée* par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si :
la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Notation : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ ou $u_n = O(v_n)$ (lire « grand O de v_n »).

Exemple. $n \sin n = O(n)$ car :

6.2 Suite négligeable devant une autre

Définition 10. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *négligeable* devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si :
la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Notation : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ ou $u_n = o(v_n)$ (lire « petit o de v_n »).

Exemple. $n = o(n^2)$ car :

Croissances comparées des suites $\left((\ln n)^\beta\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{e}^{\gamma n})_{n\in\mathbb{N}}$

Théorème 12. *Soient α, β et γ trois réels strictement positifs. Les suites $\left((\ln n)^\beta\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{e}^{\gamma n})_{n\in\mathbb{N}}$ divergent vers $+\infty$ et on a :*

$$(\ln n)^\beta \ll n^\alpha \ll \mathrm{e}^{\gamma n},$$

c'est-à-dire $(\ln n)^\beta = o(n^\alpha)$ et $n^\alpha = o(\mathrm{e}^{\gamma n})$.

Exemple. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n + n^5}{\mathrm{e}^n} = 0$.

6.3 Suites équivalentes

Définition 11. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *équivalente* à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si :
la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

Notation : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ou $u_n \sim v_n$ (lire « est équivalent à v_n »).

Exemple. $n + 1 \sim n$ car :

Proposition 3. *1. Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n = O(v_n)$.*
2. Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n = O(v_n)$.
3. (Symétrie de $\sim$)

$$\text{Si } u_n \sim v_n \text{ , alors } v_n \sim u_n \text{ .}$$

4. (Transitivité de $\sim$)

$$\text{Si } u_n \sim v_n \text{ et } v_n \sim w_n, \text{ alors } u_n \sim w_n \text{ .}$$

Équivalents à connaître :

Proposition 4. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers 0. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+\star}$.*

$$\sin(u_n) \sim u_n \qquad \cos(u_n) \sim 1$$

$$\tan(u_n) \sim u_n \qquad 1-\cos(u_n) \sim \frac{u_n^2}{2}$$

$$\ln(1+u_n) \sim u_n \qquad \mathrm{e}^{u_n} - 1 \sim u_n$$

$$(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$$

Exemple. $\sin(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - 1 \sim \dots\dots\dots$ car $\dots\dots\dots$

Compatibilité de l'équivalence avec le produit, le quotient, les puissances

Proposition 5. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles « convenables » telles que :*

$$u_n \sim v_n \quad \textit{et} \quad u'_n \sim v'_n.$$

Alors :

- *Compatibilité avec le produit :*

$$u_n \times u'_n \sim v_n \times v'_n.$$

- *Compatibilité avec le quotient :*

$$\frac{u_n}{u'_n} \sim \frac{v_n}{v'_n}.$$

- *Compatibilité avec les puissances :*

Si les suites sont strictement positives à partir d'un certain rang, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$u_n^\alpha \sim v_n^\alpha.$$

Remarque. On ne peut pas additionner et composer des équivalents en général :

- $-n^2 + 1 \sim -n^2$ et $n^2 \sim n^2 + \frac{1}{n}$, mais $1 \not\sim \frac{1}{n}$.
- $n+1 \sim n$, mais $\mathrm{e}^{n+1} \not\sim \mathrm{e}^n$.

Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.

Proposition 6. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles « convenables » telles que*

$$u_n \sim v_n.$$

Si l'une des suites est positive (resp. négative) à partir d'un certain rang, alors il en est de même pour l'autre suite.

Si l'une des suites admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors l'autre suite admet la même limite.

Exercice 11. Méthodologie : Déterminer un équivalent

1. Déterminer des équivalents simples de

$$u_n = \frac{n-1}{n^2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{2-n^2}{n^3}.$$

2. Déterminer des équivalents de $u_n \times v_n$, $\dfrac{u_n}{v_n}$, $u_n + v_n$ et $u_n - v_n$.