Chapitre 15 : Calcul matriciel

Dans ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Vocabulaire

Définition 1. Soient n et p deux entiers naturels non nuls.
On appelle

matrice de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$

toute famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indicée par $[\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$.
L'ensemble de telles matrices est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ lorsque $n = p$).

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On écrit M sous la forme d'un tableau de n lignes et p colonnes, c'est-à-dire

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad n \text{ lignes}$$

p colonnes

La matrice M est aussi notée $(a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on appelle *i-ème vecteur ligne de M* la matrice de taille $1 \times p$ égale à :

$$\begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,3} & \cdots & a_{i,p} \end{pmatrix}.$$

Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on appelle *j-ème vecteur colonne de M* la matrice de taille $n \times 1$ égale à :

$$\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}.$$

Exemple. La matrice $\left((-1)^i \cdot j!\right)_{(i,j) \in [\![1,2]\!] \times [\![1,4]\!]}$ s'écrit :

Égalité de deux matrices

Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n',p'}(\mathbb{K})$. On a :

$$A = B \iff \begin{cases} n = n' \\ p = p' \\ \forall (i,j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!], \quad a_{i,j} = b_{i,j}. \end{cases}$$

Définition 2. Soient n et p deux entiers naturels non nuls.
Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$ une matrice de taille $n \times p$ à coefficients de $\mathbb{K}$. On dit que A est une *matrice carrée* si et seulement si $n = p$. On parle de matrice carrée de taille n (ou d'ordre n).

De plus, une matrice carrée est dite :

1. *symétrique* si et seulement si
$$\text{pour tout } (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} = a_{j,i}.$$
Exemple.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$
2. *antisymétrique* si et seulement si
$$\text{pour tout } (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} = -a_{j,i}.$$
Exemple.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
3. *triangulaire supérieure* si et seulement si
$$\text{pour tout } (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \text{ tel que } i > j,\ a_{i,j} = 0.$$
Exemple.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
4. *triangulaire inférieure* si et seulement si
$$\text{pour tout } (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \text{ tel que } i < j,\ a_{i,j} = 0.$$
Exemple.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$
5. *diagonale* si et seulement si
$$\text{pour tout } (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \text{ tel que } i \neq j,\ a_{i,j} = 0.$$
Exemple.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Définition 3. Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

1. La matrice de taille $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls est appelée *matrice nulle* et notée $0_{n,p}$.
Exemple.
$$0_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
2. La matrice diagonale de taille n dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1 est appelée *matrice identité de taille* n et notée I_n.
Exemple.
$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
3. La matrice de taille $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls excepté celui en position (i,j), qui vaut 1, est appelée *matrice élémentaire* et notée $E_{i,j}$.
Exemple. $n = 2, p = 3$.
$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$E_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Opérations sur les matrices

2.1 Somme de deux matrices et produit par un scalaire

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^{\star 2}$. L'ensemble des matrices de taille $n \times p$ est muni d'une loi interne (addition) et d'une loi externe (multiplication par un scalaire).

Pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ et toutes matrices $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ et $B = (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$,
$$\boxed{\begin{aligned} A + B &= (a_{i,j} + b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \\ \lambda A &= (\lambda a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \end{aligned}}$$

Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors

$3A =$

$A + B =$

$3A - B =$

2.2 Produit de deux matrices

On définit à présent, lorsque cela est possible, le produit de deux matrices.

Définition 4. (Produit matriciel) Soient m, n et p trois entiers naturels non nuls. Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$.

On appelle produit des matrices A et B, et note AB, la matrice C de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \forall j \in [\![1, m]\!] \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}.}$$

Remarque. On ne peut effectuer le produit de deux matrices que si le nombre de colonnes de la première matrice est égal au nombre de lignes de la seconde.

Méthodologie : Calculer le produit de deux matrices

Exercice 1. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.
Calculer AB et BA. Commenter les résultats.

Règles de calculs

On peut vérifier que pour tout $(m, n, p, q) \in \mathbb{N}^{\star 4}$,

1. pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad \text{et cette matrice est notée } A + B + C,$$

$$A + B = B + A, \quad A + 0_{n,p} = A, \quad A - A = 0_{n,p},$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B, \quad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A,$$

$$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) \quad \text{et cette matrice est notée } \lambda\mu A,$$

2. pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$,

$$\boxed{A(B + C) = AB + AC.} \quad \text{(distributivité à gauche par rapport à +)}$$

3. pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$,

$$\boxed{(A + B)C = AC + BC.} \quad \text{(distributivité à droite par rapport à +)}$$

4. pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{K})$,

$$\boxed{(AB)C = A(BC).} \quad \text{(associativité du produit matriciel)}$$

   On notera ce produit ABC.

5. pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

$$\boxed{AI_p = I_n A = A} \quad \text{et} \quad \boxed{A0_p = 0_n A = 0_{n,p}.}$$

2.3 Puissance d'une matrice carrée

Définition 5. Soit $p \in \mathbb{N}^\star$. Soit A une matrice carrée de taille p à coefficients dans $\mathbb{K}$.

$$A^0 = I_p, \quad A^1 = A \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\, A^{n+1} = AA^n = A^n A.$$

La matrice A^n est appelée puissance n-ième de la matrice A.

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer A^2 et A^3.

Méthodologie : Déterminer la puissance n-ième d'une matrice carrée - Conjecture & récurrence

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer A^n.

Proposition 1. *Soit A une matrice diagonale de taille p :*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_p \end{pmatrix}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A^n = \begin{pmatrix} \alpha_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2^n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_p^n \end{pmatrix}.$$

Exemple. Déterminer la puissance 5-ième de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.4 Binôme de Newton

Proposition 2. *Soit $p \in \mathbb{N}^\star$. Soient A et B deux matrices carrées de taille p à coefficients dans $\mathbb{K}$. Si $AB = BA$, alors*

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Méthodologie : Déterminer la puissance n-ième d'une matrice carrée - binôme de Newton.

Exercice 3. On considère les matrices

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M = D + N.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer M^n.

2.5 Transposée d'une matrice

Définition 6. Soient n et p deux entiers naturels non nuls.
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle *transposée de* A et on note A^T la matrice de taille $p \times n$ de coefficients $(b_{i,j})$ telle que

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \quad \forall j \in [\![1, n]\!] \quad b_{i,j} = a_{j,i}.$$

On peut vérifier que pour tout $(m, n, p) \in (\mathbb{N}^\star)^3$,

1. pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$,

$$\left(A^T\right)^T = A \quad \text{et} \quad (\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T.$$

2. pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$,

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

On constate qu'une matrice carrée A est :

(i) symétrique si et seulement si $A^T = A$.
(ii) antisymétrique si et seulement si $A^T = -A$.

3 Matrice inversible

Définition 7. Soit A une matrice carrée de taille n. On dit que la matrice A est *inversible* s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\boxed{AB = BA = I_n.}$$

On appelle *groupe linéaire*, et on note $GL_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices carrées inversibles de taille n.

Remarque. Une matrice inversible est nécessairement carrée.

Proposition 3. (Unicité de l'inverse d'une matrice) Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe une unique matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, notée A^{-1}, telle que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

La matrice A^{-1} s'appelle l'inverse de A.

Démonstration.

Exemple. 1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ (à vérifier). En déduire l'inverse de la matrice $3A$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. La matrice A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

Proposition 4. *Soient A et B des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Démonstration.

Théorème 1. *Soit A une matrice carrée de taille n. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *la matrice A est inversible,*
- (ii) *il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$,*
- (iii) *il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $CA = I_n$.*

Conséquence. Pour vérifier que la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ est l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, il suffit d'effectuer un produit matriciel.

Opérations sur les lignes

On s'autorise trois types d'opérations sur les lignes d'une matrice :

1. multiplier une ligne par un scalaire non nul ($L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$),
2. permuter deux lignes ($L_i \leftrightarrow L_j$),
3. ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne ($L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$).

Définition 8. On appelle *rang d'une matrice* le nombre de pivots non nuls obtenus à l'issue de l'algorithme de Gauss.

Exercice 4. Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -6 & 16 & -2 \\ -11 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

Proposition 5. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :*
1. A est inversible si et seulement s'il est possible de transformer A en I_n par une suite d'opérations sur les lignes.
2. Étant donnée une suite d'opérations qui transforme A en I_n, on obtient A^{-1} en appliquant les mêmes opérations, dans le même ordre, à la matrice I_n.

Méthodologie : Calcul de l'inverse d'une matrice.

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Proposition 6. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si $det(A) \neq 0$.*

Ainsi, lorsque $n = 2$ ou $n = 3$, on peut calculer le déterminant d'une matrice pour montrer qu'elle est inversible ou non.

Cas particulier des matrices carrées de taille 2.

Proposition 7. *Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas,*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

4 Applications linéaires de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$

4.1 Systèmes linéaires

On considère un système linéaire de n équations à p inconnues :

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right. .$$

Ce système est de la forme

$$AX = B$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Méthodologie : Expression d'un système linéaire $\rightsquigarrow$ Notation matricielle.

Exercice 6.

$$(S)\left\{\begin{array}{lcl} 2x - y + z + t & = & 0 \\ 3x - y + 2z + t & = & 1 \\ 4x - y + 2t & = & 4 \end{array}\right. .$$

Méthodologie : Notation matricielle d'un système linéaire $\rightsquigarrow$ Expression.

Exercice 7.

$$(S)\quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

Proposition 8. *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n$. On considère le système (S) :*

$$AX = B$$

d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$. Si la matrice A est inversible, alors (S) admet une unique solution : $A^{-1}B$. En effet

$$AX = B \iff X = A^{-1}B.$$

Exercice 8. Résoudre le système $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

4.2 Définitions

Définition 9. (Combinaison linéaire) Soient $X_1, X_2, \dots, X_p$ p objets. On appelle

$$\textit{combinaison linéaire de}\ \ X_1, X_2, \dots, X_p$$

toute expression de la forme

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_p X_p,\ \text{avec } \lambda_i \text{ dans } \mathbb{K}.$$

On note $\operatorname{Vect}(X_1, X_2, \dots, X_p)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $X_1, X_2, \dots, X_p$.

Exemple. 1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
$2x + y - z$ est une combinaison linéaire de x, y, z.
Mais $x^2 + e^y + 3z$ et $2x + y + 1$ ne sont pas des combinaisons linéaires de x, y, z.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
La matrice A est une combinaison linéaire des matrices $E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{22}$ car $A = 1 \times E_{1,1} + 2 \times E_{1,2} + 0 \times E_{2,1} + (-1) \times E_{2,2}$.

Définition 10. On appelle *application linéaire de $\mathbb{K}^P$ dans $\mathbb{K}^n$* toute application $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ de la forme :

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p \end{pmatrix},\ \text{avec } a_{i,j} \in \mathbb{K}.$$

Exemple. L'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + z, 2x - y + 3z) \end{array}$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
L'application $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, x^2 + 1) \end{array}$ n'est pas une application linéaire.

Définition 11. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{K}^n \\ X & \mapsto & AX \end{array}$ est appelée application linéaire canoniquement associée à la matrice A.

Méthodologie : Matrice $\rightsquigarrow$ Application linéaire.

Exercice 9. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -6 & 16 & -2 \end{pmatrix}$. Donner l'expression de l'application linéaire canoniquement associée à A.

Méthodologie : Application linéaire $\rightsquigarrow$ Matrice.

Exercice 10. 1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (ax+by, cx+dy) \end{array}$.
Quelle est la matrice canoniquement associée à f ?

2. Soit $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (2x-y+z+t, 3x-y+2z+t, 4x-y+2t) \end{array}$.
Quelle est la matrice canoniquement associée à g ?

Définition 12. Soit $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ une application linéaire.
On appelle *noyau de* f, et on note $\operatorname{Ker}(f)$, l'ensemble des éléments X de $\mathbb{K}^p$ tels que $f(X) = 0_{\mathbb{K}^n}$:

$$\operatorname{Ker}(f) = f^{-1}\left(0_{\mathbb{K}^n}\right) = \left\{X \in \mathbb{K}^p \mid f(X) = (0, 0, \ldots, 0)\right\}.$$

On appelle *image de* f, et on note $\operatorname{Im}(f)$, l'ensemble des $f(X)$ tels que $X \in \mathbb{K}^p$:

$$\operatorname{Im}(f) = \left\{f(X) \mid X \in \mathbb{K}^p\right\}.$$

Proposition 9. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note f l'application linéaire canoniquement associée à A et $C_1, \ldots, C_p$ les colonnes de la matrice A. Alors*

$$\operatorname{Ker}(f) = \left\{X \in \mathbb{K}^p \mid AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

et $\operatorname{Im}(f)$ *est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs colonne de A :*

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\left(C_1, \ldots, C_p\right).$$

Démonstration.

Méthodologie : Déterminer Ker(f).

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y - z, 4x + y - 2z, 6x + 3y - 4z) \end{array}$.
Déterminer $\operatorname{Ker}(f)$.

Méthodologie : Déterminer $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 11. Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y-z, 4x+y-2z, 6x+3y-4z) \end{array}.$$

Déterminer $\mathrm{Im}(f)$.

Méthodologie : Déterminer des équations de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 12. Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y-z, 4x+y-2z, 6x+3y-4z) \end{array}.$$

Déterminer des équations de $\mathrm{Im}(f)$.