

Chapitre 17 : Espaces vectoriels

Première partie : Espaces et sous-espaces vectoriels

1 Définitions et règles de calcul

Dans ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Définition 1. Un \mathbb{K} -espace vectoriel, ou un espace vectoriel sur \mathbb{K} , est un ensemble non vide E dont les éléments s'appellent des vecteurs et qui est muni de deux opérations $+$ et \cdot , la somme de vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un scalaire, vérifiant un certain nombre de propriétés.

Pour tous $x, y \in E$, $x + y \in E$.
Pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, $\lambda \cdot x \in E$.

Notation : $(E, +, \cdot)$.

Les règles de calcul sont les suivantes :

1. Pour tous $x, y \in E$, on a $x + y = y + x$,
2. Pour tous $x, y, z \in E$, on a $(x + y) + z = x + (y + z)$ et ce vecteur est noté $x + y + z$,
3. Il existe un vecteur de E appelé vecteur nul et noté 0_E tel que pour tout $x \in E$, $x + 0_E = x$,
4. Pour tout $x \in E$, il existe un vecteur de E , appelé opposé de x et noté $-x$, tel que $x + (-x) = 0_E$,
5. Pour tout $x \in E$, on a $1 \cdot x = x$,
6. Pour tout $x \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$,
7. Pour tout $x \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a $(\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$,
8. Pour tous $x, y \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$.

Espaces vectoriels de référence

$(E, +, \cdot)$	0_E
$(\mathbb{K}, +, \cdot)$	0
$(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$0_{\mathbb{K}^n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ Le vecteur nul
$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ L'ensemble des suites réelles	$0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} = (0, 0, \dots)$ La suite nulle
$(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans \mathbb{K}	$0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ La matrice nulle à n lignes et p colonnes
$(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ L'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{K}	$0_{\mathbb{K}[X]} = 0$ Le polynôme nul
$(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$ avec $I \subset \mathbb{R}$ non vide, aussi noté $(\mathbb{R}^I, +, \cdot)$ L'ensemble des fonctions $I \rightarrow \mathbb{R}$	$0_{\mathcal{F}(I, \mathbb{R})} : \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \end{array}$ La fonction nulle définie sur I à valeurs dans \mathbb{R}

$(E, +, \cdot)$	0_E
$(\mathcal{F}(A, \mathbb{K}), +, \cdot)$ avec $A \subset \mathbb{K}$ non vide	$0_{\mathcal{F}(A, \mathbb{K})} : A \rightarrow \mathbb{K}$ $x \mapsto 0$
L'ensemble des applications de A dans \mathbb{K}	L'application nulle définie sur A à valeurs dans \mathbb{K}

Combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs

Définition 2. Soient $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ et \vec{w} des vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel. S'il existe $\lambda_1 \in \mathbb{K}$ tel que $\vec{w} = \lambda_1 \vec{v}_1$, alors on dit que le vecteur \vec{w} est *colinéaire* au vecteur \vec{v}_1 . S'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\vec{w} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n$, alors on dit que le vecteur \vec{w} est *combinaison linéaire* de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$.

Exemple. 1. Le vecteur $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ est colinéaire au vecteur

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ car } Y = 2X.$$

2. Le vecteur $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, car $Y = 2X_1 + X_2$.

3. Le polynôme $P = 1 - 2X^2$ est une combinaison linéaire des polynômes $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et $P_2 = X^2$, car

$$P = 1 \times P_0 + 0 \times P_1 - 2 \times P_2.$$

2 Sous-espaces vectoriels

Définition

Définition 3. Soient $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si :

1. $F \subset E$,
2. $0_E \in F$,
3. pour tous $x, y \in F$, $x + y \in F$,
4. pour tout $x \in F$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot x \in F$.

Proposition 1. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Tout sous-espace vectoriel de E est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Les sous-espaces vectoriels fournissent de nouveaux et nombreux exemples d'espaces vectoriels.

- Exemple.**
1. Les parties $\{0\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E .
 2. Soit I un intervalle de \mathbb{R} . L'ensemble des fonctions continues (respectivement dérivables) de I dans \mathbb{R} est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$. C'est donc un \mathbb{R} -espace vectoriel.
 3. L'ensemble des suites convergentes réelles est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$. C'est donc un \mathbb{R} -espace vectoriel.
 4. L'ensemble des matrices diagonales d'ordre n est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$. C'est donc un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Remarque. Le complémentaire d'un sous-espace vectoriel de E n'est pas un sous-espace vectoriel de E .

Exemples de sous-espaces vectoriels

Exercice 1. On note F est l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0 \text{ et } x - y - z = 0\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Plus généralement :

Proposition 2. L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à coefficients dans \mathbb{K} à p inconnues est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}^p, +, \cdot)$.

Exercice 2. On note \mathcal{H} l'ensemble des solutions définies sur \mathbb{R} de l'équation différentielle

$$y' + xy = 0 \quad (H).$$

Montrer que \mathcal{H} est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$.

Plus généralement :

Proposition 3. L'ensemble des solutions sur un intervalle I d'une équation différentielle linéaire homogène est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$.

Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs

Proposition 4. Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ des vecteurs de E .

On note $\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ l'ensemble des vecteurs qui sont des combinaisons linéaires de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$:

$$\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = \{\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n \text{ avec } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}.$$

Alors $\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ est un sous-espace vectoriel de E . On l'appelle le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$.

Exemple. 1. Dans \mathbb{R}^3 , $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est le plan d'équation $z = 0$.

2. Dans $\mathbb{R}[X]$, $\text{Vect}(1 - X, X^2)$ est l'ensemble des polynômes de la forme $a(1 - X) + bX^2$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$.

Montrer que $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Intersection de sous-espaces vectoriels

Proposition 5. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E , alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E .

Remarque. La réunion de deux sous-espaces vectoriels de E n'est pas en général un sous-espace vectoriel de E .

Somme de deux sous-espaces vectoriels

Proposition 6. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E .

On note $F+G$ l'ensemble des vecteurs $\vec{z} \in E$ qui s'écrivent $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$, avec $\vec{x} \in F$ et $\vec{y} \in G$:

$$F + G = \{ \vec{x} + \vec{y} \mid \vec{x} \in F \text{ et } \vec{y} \in G \}.$$

Alors $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E . On l'appelle la somme de F et G .

Proposition 7. Si $F = \text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ et $G = \text{Vect}(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_p)$, alors

$$F + G = \text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_p).$$

Exemple. Dans $\mathbb{R}[X]$, si $F = \text{Vect}(1, X)$ et $G = \text{Vect}(X^2)$, alors

$$\begin{aligned} F + G &= \text{Vect}(1, X, X^2) \\ &= \{ a + bX + cX^2, \text{ avec } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \} \\ &= \mathbb{R}_2[X]. \end{aligned}$$

Chapitre 17 : Espaces vectoriels

Deuxième partie : Familles finies de vecteurs

Dans ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et E est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

1 Indépendance linéaire

Familles libres

Définition 1. (Famille libre) Soient $x_1, \dots, x_n \in E$. On dit que les vecteurs x_1, \dots, x_n sont *linéairement indépendants* (ou encore que les vecteurs x_1, \dots, x_n constitue une *famille libre*) si pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, on a l'implication

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0_E \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Ainsi la famille $\{x_1, \dots, x_n\}$ est libre s'il n'y a qu'une seule façon d'écrire le vecteur nul comme combinaison linéaire de x_1, \dots, x_n .

Une famille constituée d'un seul vecteur $x \in E$ est dite libre si et seulement si $x \neq 0_E$.

Exercice 1. Montrer les assertions suivantes :

1. Dans $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, les vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ constituent une famille libre.
2. Dans $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$, les polynômes $P_1 = 1$, $P_2 = 1 + X$ et $P_3 = 1 + X + X^2$ sont linéairement indépendants.

3. Dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$, les matrices suivantes constituent une famille libre :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les fonctions \cos et \sin sont linéairement indépendantes .

Proposition 1. Toute famille de polynômes non nuls à coefficients dans \mathbb{K} de degrés échelonnés (de degrés deux à deux distincts) est libre.

Exemple. 1. La famille $(1, X, X^2)$ est libre.

2. La famille $(1 - X, 1 + X + X^2, 1 - X + X^4)$ est libre.

Remarque. Attention la réciproque est fautive : une famille libre de polynômes n'est pas nécessairement de degrés échelonnés.

Familles liées

Définition 2. (Famille liée) Une famille de vecteurs x_1, \dots, x_n qui n'est pas libre est dite *liée*. Dans une famille liée, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ non tous nuls (c'est-à-dire qu'au moins l'un d'entre eux n'est pas nul) tels que

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0_E.$$

Exemple. Dans \mathbb{R}^2 , la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ est liée car $2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dans \mathbb{R}^3 , la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est liée car

$$0 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Plus généralement deux vecteurs de \mathbb{K}^n constituent une famille liée si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.

Exercice 2. Dans \mathbb{R}^3 , on considère les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Montrer que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est liée et déterminer une relation linéaire liant ces vecteurs.

2 Famille génératrice

Définition 3. (Famille génératrice) Soient F un sous-espace vectoriel de E et $x_1, \dots, x_n \in F$.

On dit que la famille $\{x_1, \dots, x_n\}$ est une *famille génératrice* de F (ou encore que F est engendré par les vecteurs x_1, \dots, x_n) si tout vecteur y de F s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs x_1, \dots, x_n :

$$\forall y \in F, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,$$

$$y = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n.$$

Dans ce cas, $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

Remarque. 1. Dans une famille génératrice, on peut échanger deux vecteurs :

$$\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

2. Dans une famille génératrice, on peut retirer le vecteur nul :

$$\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

3. Dans une famille génératrice, on peut multiplier un vecteur par un scalaire non nul :

$$\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

4. Dans une famille génératrice, on peut ajouter à un vecteur un multiple d'un autre vecteur :

$$\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \underset{v_2 \leftarrow v_2 - v_1}{=} \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

5. Ainsi, dans une famille génératrice, on peut supprimer (ou ajouter) un vecteur qui serait combinaison linéaire des autres vecteurs.

$$\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

MÉTHODOLOGIE : DÉTERMINER UNE FAMILLE GÉNÉRATRICE (DESCRIPTION PARAMÉTRÉE)

Exercice 3. Déterminer une famille génératrice des sous-espaces vectoriels suivants :

1. Dans \mathbb{R}^3 : on note

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 4a - b \\ 2a - b \\ 6a - b \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: on note

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & a-2b \\ 3c & a \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

3. Dans $\mathbb{R}[X]$: on note

$$H = \{ \alpha X^3 + (\alpha - \beta)X^2 + 2\alpha X - \beta \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \}.$$

MÉTHODOLOGIE : DÉTERMINER UNE FAMILLE GÉNÉRATRICE

Exercice 4. Déterminer une famille génératrice des sous-espaces vectoriels suivants :

1. Dans \mathbb{R}^3 : on note

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0 \text{ et } x + y - 3z = 0 \right\}.$$

2. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: on note

$$G = \{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA \},$$

$$\text{où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Dans $\mathbb{R}[X]$: on note

$$H = \{ P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0 \}.$$

3 Bases

Définition 4. (Base) Soient e_1, \dots, e_n des vecteurs de E . On dit que (e_1, \dots, e_n) est une *base* de E si cette famille est à la fois libre et génératrice.

MÉTHODOLOGIE : DÉTERMINER UNE BASE D'UN SOUS-ESPACE VECTORIEL

Exercice 5. Déterminer une base des sous-espaces vectoriels suivants :

1. Dans \mathbb{R}^3 : on note

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0 \text{ et } x + y - 3z = 0 \right\}.$$

2. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: on note

$$G = \{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA \},$$

$$\text{où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Dans $\mathbb{R}[X]$: on note

$$H = \{ P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0 \}.$$

Définition 5. (Coordonnées) Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E . Alors pour tout vecteur $x \in E$, il existe $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ uniques tels que

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

Les scalaires x_1, \dots, x_n sont appelés les *coordonnées* du vecteur x dans la base (e_1, \dots, e_n) .

Notation : Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Exemples usuels.

Base canonique de \mathbb{K}^n : Soient

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de \mathbb{K}^n , appelée base canonique de \mathbb{K}^n .

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$: La famille $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, appelée base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}} (a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Par exemple, la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(1 - X^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: L'ensemble des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ constitue une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Par exemple, on considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}} \left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Dans \mathbb{R}^3 , on considère les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On note \mathcal{F} la famille (v_1, v_2, v_3) . Montrer que \mathcal{F} constitue une base de \mathbb{R}^3

et déterminer les coordonnées du vecteur $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{F} .

Exercice 7. Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère les polynômes $P_1 = 1$, $P_2 = 1 + X$ et $P_3 = 1 + X + X^2$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$ constitue une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer les coordonnées du polynôme $R = 3 + X + 2X^2$ dans la base \mathcal{B} .

Chapitre 17 : Espaces vectoriels

Troisième partie : Espaces vectoriels de dimension finie

Dans ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et E est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

1 Dimension finie

Définition 1. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.
On dit que E est un espace vectoriel *de dimension finie* s'il admet une famille génératrice finie.

Théorème 1. (*Théorème de la base extraite*)
On peut extraire de toute famille génératrice finie de E une base de E .

Corollaire 1. *Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.*

MÉTHODOLOGIE : EXTRAIRE UNE BASE D'UNE FAMILLE GÉNÉRATRICE.

Exercice 1. Dans \mathbb{R}^4 , on considère les vecteurs suivants :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ et } v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On note \mathcal{F} la famille $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ et F le sous-espace vectoriel engendré par \mathcal{F} : $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$. Extraire de \mathcal{F} une base de F .

Solution.

Pour cela, on opère sur les colonnes de la matrice

$$\text{Mat}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

On s'autorise trois types d'opérations sur les colonnes d'une matrice :

1. multiplier une colonne par un scalaire non nul :

$$C_i \leftarrow \lambda C_i \text{ avec } \lambda \neq 0,$$

2. permuter deux colonnes :

$$C_i \leftrightarrow C_j,$$

3. ajouter à une colonne un multiple d'une autre colonne :

$$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j.$$

Théorème 2. (Théorème de la base incomplète)
 Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
 Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E .

Exercice 2. Dans \mathbb{R}^4 , on considère les vecteurs linéairement indépendants

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Compléter la famille $\{v_1, v_2\}$ en une base de \mathbb{R}^4 .

Proposition 1. Supposons que E possède une base formée de n vecteurs, alors toute famille de p vecteurs avec $p > n$ est liée.

Théorème 3. Si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les bases de E contiennent le même nombre de vecteurs. Ce nombre est appelé dimension de E et se note $\dim E$.
 Par convention, on définit la dimension de l'espace vectoriel $\{0\}$ en posant $\dim\{0\} = 0$.

Dimensions des espaces vectoriels de dimension finie de référence

E	\mathbb{K} -espace vectoriel	Base canonique	Dimension
\mathbb{K}^n	\mathbb{K} -espace vectoriel	$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ avec $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ \dots $e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	n

E	\mathbb{K} -espace vectoriel	Base canonique	Dimension
\mathbb{R}^3	\mathbb{R} -espace vectoriel	$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	3
\mathbb{C}	\mathbb{R} -espace vectoriel	$\mathcal{B} = (1, i)$	2
$\mathbb{K}_n[X]$	\mathbb{K} -espace vectoriel	$\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$	$n + 1$
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	\mathbb{K} -espace vectoriel	$\mathcal{B} = (E_{i,j})$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$	$n \times p$
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	\mathbb{K} -espace vectoriel	$\mathcal{B} = (E_{i,j})$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$	n^2
$\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$	\mathbb{K} -espace vectoriel	$\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ avec $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	4

L'énoncé qui suit est utile lorsque l'on veut démontrer que des vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n forment une base :

Théorème 4. *Soit E un espace vectoriel de dimension n .
Une famille libre de n vecteurs constitue une base de E .
Une famille génératrice de n vecteurs constitue une base de E .*

Remarque. On peut énoncer ce résultat de la façon suivante. Soit \mathcal{F} une famille de n vecteurs dans un espace de dimension n . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. \mathcal{F} est libre,
2. \mathcal{F} est génératrice,
3. \mathcal{F} est une base.

Exercice 3. 1. Dans $\mathbb{R}_3[X]$, on considère les polynômes suivants :

$$P_0 = 1 \quad P_1 = 1 + X \quad P_2 = X + 2X^2 \quad P_3 = 1 + X^3.$$

Montrer que la famille $\mathcal{F} = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ constitue une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Dans \mathbb{R}^3 , on considère les vecteurs

$$u = (1, 2, 3), \quad v = (1, 1, 1) \quad \text{et} \quad w = (0, 0, 1).$$

Montrer que la famille $\mathcal{F} = \{u, v, w\}$ constitue une base de \mathbb{R}^3 .

2 Sous-espaces vectoriels de dimension finie

Théorème 5. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Si F est un sous-espace vectoriel de E ,
alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$.*

De plus, si $F \subset E$ et $\dim F = \dim E$,

$$\text{alors } F = E.$$

Théorème 6. *(Formule de Grassmann) Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On a*

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Chapitre 17 : Espaces vectoriels

Quatrième partie : Somme de sous-espaces vectoriels en dimension finie

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E .

Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 1. (Somme de sous-espaces vectoriels) On note $F + G$ l'ensemble des vecteurs $z \in E$ qui s'écrivent $z = x + y$, avec $x \in F$ et $y \in G$:

$$F + G = \{x + y \text{ tels que } x \in F \text{ et } y \in G\}.$$

On l'appelle la somme de F et de G .

Proposition 1. $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration. 1. $F + G \subset E$.

2. $0_E \in F + G$, car $0_E = 0_E + 0_E \in F + G$.

3. Si $z = x + y$ et $z' = x' + y'$ appartiennent à $F + G$, alors

$$\begin{aligned} z + z' &= (x + y) + (x' + y') \\ &= \underbrace{x + x'}_{\in F} + \underbrace{y + y'}_{\in G} \end{aligned}$$

et $z + z' \in F + G$.

4. Si $z = x + y \in F + G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$\begin{aligned} \lambda z &= \lambda(x + y) \\ &= \underbrace{\lambda x}_{\in F} + \underbrace{\lambda y}_{\in G} \end{aligned}$$

et $\lambda z \in F + G$. □

Proposition 2. Si $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ et $G = \text{Vect}(y_1, \dots, y_p)$, alors

$$F + G = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p).$$

Exemple. Dans $\mathbb{R}[X]$, si $F = \text{Vect}(1, X)$ et $G = \text{Vect}(X^2)$, alors

$$\begin{aligned} F + G &= \text{Vect}(1, X, X^2) \\ &= \{a + bX + cX^2, \text{ avec } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \mathbb{R}_2[X]. \end{aligned}$$

Définition 2. (Somme directe) La somme $F + G$ est dite directe (ou que F et G sont en somme directe) si tout vecteur de $F + G$ s'écrit de manière unique comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :

Pour tout $z \in F + G$, il existe $x \in F$ et $y \in G$ unique tels que $z = x + y$.

Notation : $F \oplus G$.

Exemple. Dans $\mathbb{R}[X]$, si $F = \text{Vect}(1, X)$ et $G = \text{Vect}(X^2)$, alors F et G sont en somme directe.

Proposition 3. On a :

$$F \oplus G \iff F \cap G = \{0\}.$$

Exercice 1. Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$
et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y - z = 0 \text{ et } 2x - z = 0\}$.
Montrer que F et G sont en somme directe.

Proposition 4. Soit (x_1, \dots, x_n) une famille libre de vecteurs de E . Alors $\text{Vect}(x_1, \dots, x_k)$ et $\text{Vect}(x_{k+1}, \dots, x_n)$ sont en somme directe.

Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition 3. (Sous-espaces vectoriels supplémentaires) On dit que F et G sont supplémentaires, ou que F est un supplémentaire de G , si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :

Pour tout $z \in E$, il existe $x \in F$ et $y \in G$ unique tels que $z = x + y$.

Cette propriété se note $F \oplus G = E$.

Exemple. Dans \mathbb{R}^2 : On note $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et $G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de \mathbb{R}^2 s'écrit de manière unique comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in F} + y \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in G}.$$

On a donc $F \oplus G = \mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: on note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de taille n et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de taille n . Montrer que

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Proposition 5. On a :

$$\begin{aligned} F \oplus G = E &\iff F + G = E \text{ et } F \cap G = \{0\} \\ &\iff \dim(F + G) = \dim(E) \text{ et } F \cap G = \{0\} \end{aligned}$$

Proposition 6. Soient (f_1, \dots, f_p) une base de F et (g_1, \dots, g_q) une base de G .

Alors F et G sont supplémentaires si et seulement si $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une base de E .

Exercice 3. Soient

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On note $F = \text{Vect}(u)$ et $G = \text{Vect}(v, w)$. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.