Chapitre 18 : Applications linéaires

Dans ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1 Définitions et opérations

Dans ce paragraphe, E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Définition 1. (Application linéaire - Endomorphisme)

- Une *application linéaire* de E dans F est une application $f : E \to F$ telle que :
  1. pour tous $x, y \in E$,
  $$f(x+y) = f(x) + f(y),$$
  2. pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$,
  $$f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

  L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E,F)$.
- Une application linéaire de E dans E est appelée un *endomorphisme* de E.
  L'ensemble des endormorphismes de E est noté $\mathscr{L}(E)$.

Remarque. 1. Une application f est linéaire si et seulement si pour tout $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$,
$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

2. Une application linéaire f vérifie $\boxed{f(0_E) = 0_F}$. Il suffit de remplacer λ par 0 dans l'égalité $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour obtenir ce résultat.

3. Si $x_1, \dots, x_n \in E$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, alors
$$f(\lambda_1 x_1 + \dots \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$
Cette égalité se démontre par récurrence.

Exemple. 1. L'application identité de E est un endomorphisme de E. On rappelle que cette application est notée Id_E et que l'on a par définition $\mathrm{Id}_E(x) = x$ pour tout $x \in E$.

2. L'application de dérivation $P \mapsto P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

3. On note E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$.
L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \end{array}$ est une application linéaire de E sur $\mathbb{R}$.

Définition 2. (Homothétie) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle *homothéhie de E de rapport* λ l'application $\lambda \mathrm{Id}_E$, c'est-à-dire $\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & \lambda x \end{array}$. Cette application est un endomorphisme de E.

MÉTHODOLOGIE : MONTRER QU'UNE APPLICATION EST LINÉAIRE

Exercice 1. Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x, x+y, x-2y) \end{array}$ est linéaire.

Théorème 1. (Opérations sur les applications linéaires)

Soient E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- La somme de deux applications linéaires (resp. la multiplication d'une application linéaire par un scalaire) est linéaire.

  Soient $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
  Les applications $f+g : E \to F$ et $\lambda f : E \to F$ définies par pour tout $x \in E$,

  $$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ et } (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

  sont linéaires.

- La composée de deux applications linéaires est linéaire.
  Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$.

- Soient $f, f' \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g, g' \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors

  $$g \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f' \quad \text{et} \quad (g+g') \circ f = g \circ f + g' \circ f.$$

Remarque. Le premier point de ce théorème assure que toute combinaison linéaire d'applications linéaires est linéaire.

Théorème 2. Supposons E de dimension $n \geqslant 1$. Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base de E :
Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) \\ &= x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n), \end{aligned}$$

où $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 2. Déterminer l'expression de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(1,0,0) = (-1,1), \quad f(0,1,0) = (2,0) \quad \textit{et} \quad f(0,0,1) = (1,3).$$

Définition 3. (Isomorphisme - Automorphisme)

- On appelle *isomorphisme de E sur F* toute application linéaire bijective de E sur F.
- Un isomorphisme de E sur E est aussi appelé un *automorphisme de E*.
  L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathrm{GL}(E)$ et appelé le *groupe linéaire de E*.
- On dit que E est *isomorphe* à F s'il existe un isomorphisme de E sur F.

Théorème 3. (Opérations sur les isomorphismes)
Soient E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- Si f est un isomorphisme de E sur F, alors la bijection réciproque f^{-1} est un isomorphisme de F sur E.
- Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des isomorphismes, alors la composée $g \circ f$ est un isomorphisme de E dans G et

  $$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Démonstration. Supposons que f est un isomorphisme de E sur F. L'application f^{-1} est bijective. Montrons qu'elle est linéaire. Soient $y, y' \in F$. On a :

$$\begin{aligned} f^{-1}(\lambda y + y') & \underset{f\circ f^{-1}=\mathrm{Id}_F}{=} f^{-1}\left(\lambda f\left(f^{-1}(y)\right) + f\left(f^{-1}(y')\right)\right) \\ & \underset{\text{linéarité de } f}{=} f^{-1}\left(f\left(\lambda f^{-1}(y) + f^{-1}(y')\right)\right) \\ & \underset{f^{-1}\circ f=\mathrm{Id}_E}{=} \lambda f^{-1}(y) + f^{-1}(y'). \end{aligned}$$

L'application f^{-1} est donc linéaire. □

MÉTHODOLOGIE : DÉTERMINER L'EXPRESSION DE f^{-1}.

Exercice 3. Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (3x + y, 5x + 2y) \end{array}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et déterminer f^{-1}.

2 Noyau et image d'une application linéaire

Dans ce paragraphe, E, F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

2.1 Image directe d'un sous-espace vectoriel

Rappel (Image directe) Soit G une partie de E. On appelle *image de G par f*, et on note $f(G)$, l'ensemble des éléments $f(x)$, où x est un élément de G :

$$\boxed{f(G) = \{ f(x) \mid x \in G \}.}$$

Remarque : $f(G) \subset F$.

Théorème 4. Si G est un sous-espace vectoriel de E, alors $f(G)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration.

1. $f(G) \subset F$ et F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. $0_F \in f(G)$, car $0_E \in G$ et $f(0_E) = 0_F$.
3. Soient $y, y' \in f(G)$. Par définition, $y = f(x)$ et $y' = f(x')$, avec $x, x' \in G$. On a donc $y + y' = f(x) + f(x') = f(x + x')$, car f est linéaire. D'où $y + y' \in f(G)$.
4. Soient $y \in f(G)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Par définition, $y = f(x)$ avec $x \in G$. On a donc $\lambda y = \lambda f(x) = f(\lambda x)$, car f est linéaire. D'où $\lambda y \in f(G)$.

Ainsi $f(G)$ est un sous-espace vectoriel de F. □

Définition 4. On appelle *image de f*, et on note $\mathrm{Im}(f)$, le sous-espace vectoriel $f(E)$ de F :

$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{ f(x) \mid x \in E \} .$$

Caractérisation

$$\boxed{y \in \mathrm{Im}(f) \iff y = f(x) \text{ avec } x \in E.}$$

Méthodologie : Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 4. Déterminer une base de l'image de l'endomorphisme

$$f : (x, y, z) \mapsto (x + 2y + z, 2x + y - z, x + 2y + z).$$

Théorème 5. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(f(e_1), \dots, f(e_n)) .$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \{f(x) \mid x \in E\} \\ &= \{f(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) \mid x_1, \dots x_n \in \mathbb{K}\} \\ &= \{x_1f(e_1) + \cdots + x_nf(e_n) \mid x_1, \dots x_n \in \mathbb{K}\} \\ &= \mathrm{Vect}\,(f(e_1), \dots, f(e_n)) . \end{aligned}$$

□

Rappel (Application surjective) Une application $f : E \to F$ est dite *surjective* si tout élément de F admet au moins un antécédent par f :

$$\forall y \in F, \exists x \in E,\ f(x) = y.$$

Théorème 6. $f : E \to F$ est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

2.2 Image réciproque d'un sous-espace vectoriel

Rappel (Image réciproque) Soit H une partie de F. On appelle *image réciproque de H par f* , et on note $f^{-1}(H)$, l'ensemble des éléments x de E tels que $f(x) \in H$:

$$\boxed{f^{-1}(H) = \{x \in E|\, f(x) \in H\} .}$$

Remarque : $f^{-1}(H) \subset E$.

Théorème 7. Si H est un sous-espace vectoriel de F, alors $f^{-1}(H)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

1. $f^{-1}(H) \subset E$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. $0_E \in f^{-1}(H)$, car $0_F \in H$ et $f(0_E) = 0_F$.
3. Soient $x, x' \in f^{-1}(H)$. Par définition, $f(x) \in H$ et $f(x') \in H$. On a donc $f(x + x') = f(x) + f(x') \in H$, car H est un sous-espace vectoriel de F. D'où $x + x' \in f^{-1}(H)$.
4. Soient $x \in f^{-1}(H)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Par définition, $f(x) \in H$. On a donc $f(\lambda x) = \lambda f(x) \in H$, car H est un sous-espace vectoriel de F. D'où $\lambda x \in f^{-1}(H)$.

Ainsi $f^{-1}(H)$ est un sous-espace vectoriel de E. □

Définition 5. On appelle *noyau de* f, et on note $\mathrm{Ker} f$, le sous-espace vectoriel $f^{-1}(0_F)$ de E :

$$\mathrm{Ker} f = \{x \in E |\, f(x) = 0_F\}\,.$$

Caractérisation

$$\boxed{x \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(x) = 0}$$

MÉTHODOLOGIE : DÉTERMINER KER(f)

Exercice 5. Déterminer une base du noyau de l'application linéaire

$$f : (x, y, z) \mapsto (2x + y - z, x - y).$$

Rappel (Application injective) Une application $f : E \to F$ est dite *injective* si tout élément de F admet au plus un antécédent par f :

$$f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

Théorème 8. L'application f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que f est injective.

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}(f) &\iff f(x) = 0_F \\ &\iff f(x) = f(0_E) \\ &\iff x = 0_E, \end{aligned}$$

car f est injective. Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$. Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Alors $f(x) - f(x') = 0_F$, ie $f(x - x') = 0_F$. Donc $x - x' \in \mathrm{Ker}(f)$ et $x - x' = 0_E$ par hypothèse. D'où $x = x'$. On en déduit que f est injective. □

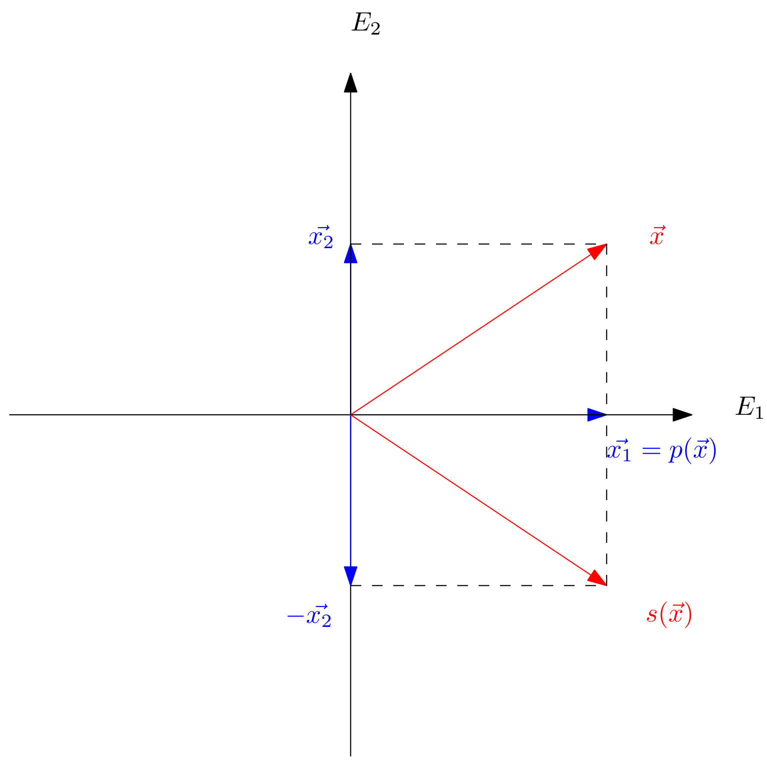
3 Projections et symétries

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E :

$$E_1 \oplus E_2 = E.$$

On rappelle que tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique

$$x = \underbrace{x_1}_{\in E_1} + \underbrace{x_2}_{\in E_2}.$$



Définition 6. ◆ On note $p : E \to E$ l'application définie par

$$\boxed{p(x) = x_1}$$

pour tout $x \in E$. L'application p est linéaire. On l'appelle *projection sur E_1 parallèlement à E_2* ou encore *projecteur sur E_1 de direction E_2*. On a :

$$p(x) = 0 \iff x \in E_2 \quad \text{et} \quad p(x) = x \iff x \in E_1.$$

◆ On note $s : E \to E$ l'application définie par

$$\boxed{s(x) = x_1 - x_2}$$

pour tout $x \in E$. L'application s est linéaire. On l'appelle *symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2* ou encore *symétrie par rapport à E_1 de direction E_2*. On a :

$$s(x) = -x \iff x \in E_2 \quad \text{et} \quad s(x) = x \iff x \in E_1.$$

Remarque. On a $\boxed{s = 2p - \mathrm{Id}_E}$. En effet, pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned}(2p - \mathrm{Id}_E)(x) &= 2p(x) - x \\ &= 2x_1 - (x_1 + x_2) \\ &= x_1 - x_2 \\ &= s(x).\end{aligned}$$

Théorème 9. (Caractérisation des projecteurs)
Soit $p : E \to E$ une application.

$$p \text{ est un projecteur si et seulement si } \big(p \text{ est linéaire et } p^2 = p\big).$$

Dans ce cas, $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont des supplémentaires de E et p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Théorème 10. (Caractérisation des symétries)
Soit $s : E \to E$ une application.

$$s \text{ est une symétrie si et seulement si } \big(s \text{ est linéaire et } s^2 = \mathrm{Id}_E\big).$$

Dans ce cas, $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ sont des supplémentaires de E et s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

4 Rang

4.1 Rang d'une famille finie de vecteurs

Définition 7. (Rang d'une famille finie de vecteurs)
Soient $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs de E. La dimension de l'espace $\operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ est appelée le *rang de la famille* $(x_1, \ldots, x_n)$.
Notation : $\operatorname{rg}(x_1, \ldots, x_n)$.

Remarque. On a $\operatorname{rg}(x_1, \ldots, x_n) \leqslant n$ et $\operatorname{rg}(x_1, \ldots, x_n) = n$ si et seulement si la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre.

Exemple.

1. $\operatorname{rg}\left(1, X, X^2, X^3\right) = 4$,
2. $\operatorname{rg}(X, 2X, 3X) = 1$,
3. $\operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 2$,
4. $\operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 2$.

Méthodologie : Déterminer le rang d'une famille de vecteur $\equiv$ Déterminer le nombre de pivots non nuls en opérant sur les colonnes.

4.2 Applications linéaires de rang fini

Définition 8. (Application linéaire de rang fini) Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

- On dit que f est *de rang fini* si $\operatorname{Im}(f)$ est de dimension finie, et *de rang infini* sinon.
- Si f est de rang fini, on appelle *rang de f*, et on note $\operatorname{rg}(f)$, la dimension de $\operatorname{Im}(f)$.

Remarque. Lien entre rang d'une famille de vecteurs et rang d'une application dans le cas oùE est de dimension finie non nulle. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On a :

$$\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im}(f) = \dim \operatorname{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = \operatorname{rg}(f(e_1), \ldots, f(e_n)).$$

Méthodologie : Déterminer le rang d'une application linéaire.

Exercice 6. Déterminer le rang de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

$$f : (x, y, z) \mapsto (x + 2y + z, 2x + y - z, x + 2y + z).$$

Théorème 11. (Rang d'une composée)
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors :

$$\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\operatorname{rg}(g), \operatorname{rg}(f)).$$

Théorème 12. (Invariance du rang par composition à droite ou à gauche par un isomorphisme)
Soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Si φ est un isomorphisme de G sur E, alors $\operatorname{rg}(f \circ \varphi) = \operatorname{rg}(f)$.
- Si ψ est un isomorphisme de F sur G, alors $\operatorname{rg}(\psi \circ f) = \operatorname{rg}(f)$.

Théorème 13. (Théorème du rang)
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Si E est de dimension finie, alors f est de rang fini et

$$\boxed{\dim E = \dim(\operatorname{Ker}(f)) + \operatorname{rg}(f).}$$

5 Isomorphismes

Théorème 14. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
f est un isomorphisme si et seulement si $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base de F.

Corollaire 1. *Soient E et F de dimension finie. Alors :*

E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim E = \dim F$.

Théorème 15. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Si $\underline{\dim E = \dim F}$, alors :

$$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective.}$$

Démonstration. C'est une conséquence du théorème du rang. Montrons que f injective $\Leftrightarrow$ f surjective lorsque $\dim E = \dim F$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si f est injective, alors $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$. On en déduit que $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim E$. On a donc $\mathrm{Im}(f) \subset F$ et $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim F$, car $\dim E = \dim F$. D'où $\mathrm{Im}(f) = F$ et f est surjective.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si f est surjective, alors $\mathrm{Im}(f) = F$ et $\mathrm{rg}(f) = \dim F = \dim E$. On en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$, d'après le théorème du rang, et donc que f est injective. $\square$

Corollaire 2. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel <u>de dimension finie</u> et $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors :*

$$f \textit{ est bijective} \iff f \textit{ est injective} \iff f \textit{ est surjective.}$$

Méthodologie : Montrer qu'une application est un automorphisme.

Exercice 7. Montrer que l'application $\varphi : (x, y, z) \mapsto (x+y, -x+y, z)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Contre-exemple en dimension infinie. Soit

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & XP(X) \end{array}.$$

$\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X])$, φ est injective (vérifier que $\mathrm{Ker}\varphi = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$), mais elle n'est pas surjective (1 n'admet pas d'antécédent par φ).

6 Représentation matricielle en dimension finie

Dans ce paragraphe, E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie telle que $\dim E = p$ et $\dim F = n$.

Définition 9. (Matrice d'une famille de vecteurs dans une base)
Soient $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F et $\mathscr{F} = (x_1, \ldots, x_q)$ une famille quelconque de vecteurs de F. La *matrice de $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{C}$*, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{F})$, est la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ dont les coefficients de la j-ième colonne sont les coordonnées de x_j dans la base $\mathscr{C}$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & & x_j & & x_q \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}) = & \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,q} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,q} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow f_1 \\ \leftarrow f_2 \\ \\ \leftarrow f_n \end{array} \\ & \begin{array}{c} \uparrow \\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(x_j) \end{array} \end{array}$$

Exemple. Dans $\mathbb{R}_3[X]$:

$$P_1 = 1 + 2X + X^3, \quad P_2 = X + X^2, \quad P_3 = 1 - 2X^2 + X^3.$$

On note $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathscr{F} = (P_1, P_2, P_3)$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En opérant sur les colonnes de cette matrice, on montre que $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = 2$.

Définition 10. (Matrice d'une application linéaire) Soient $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E, $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. La *matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$*, notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$, est la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les coefficients de la j-ième colonne sont les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{C}$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} f(e_1) & f(e_2) & & f(e_j) & & f(e_p) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = & \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow f_1 \\ \leftarrow f_2 \\ \\ \leftarrow f_n \end{array} \\ & \begin{array}{c} \uparrow \\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f(e_j)) \end{array} \end{array}$$

Si $E = F$ et $\mathscr{B} = \mathscr{C}$, alors la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}$ s'appelle aussi *la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$* et se note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

Exemple.

1. Soit $\mathscr{B}$ une base quelconque de E, alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) = I_p$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y) = (x + y, -x + 2y, y)$$

   pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_3}(f)$, où $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}_3$ sont les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
   On a $f(1, 0) = (1, -1, 0)$ et $f(0, 1) = (1, 2, 1)$. D'où

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'_2,\mathscr{B}'_3}(f)$, où $\mathscr{B}'_2 = ((0, 1), (1, 0))$ et $\mathscr{B}'_3 = ((0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1))$.
   On a $f(0, 1) = (1, 2, 1) = 1 \times (0, 1, 0) + 1 \times (1, 0, 0) + 1 \times (0, 1, 1)$ et

$f(1,0) = (1,-1,0) = -1 \times (0,1,0) + 1 \times (1,0,0) + 0 \times (0,1,1)$. D'où

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'_2,\mathscr{B}'_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Attention : Si on change les bases, on change la matrice !

Théorème 16. Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $x \in E$ et $y \in F$. Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$, $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(y)$, alors :

$$y = f(x) \iff Y = AX.$$

Théorème 17. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f+g) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g)}$$

et

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda f) = \lambda \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f).}$$

Théorème 18.

- L'application $f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est un isomorphisme de $\mathscr{L}(E,F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
  En particulier,
  $$\boxed{\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = \dim E \times \dim F.}$$
- L'application $f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est un isomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
  En particulier,
  $$\boxed{\dim \mathscr{L}(E) = \dim \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) = (\dim E)^2.}$$
- Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, de bases respectives $\mathscr{B}, \mathscr{C}, \mathscr{D}$. Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors :
  $$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f).}$$

Corollaire 3. *Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. L'application f est un isomorphisme si et seulement si la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est inversible. De plus, si f est un isomorphisme, alors*

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f^{-1}) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\right)^{-1}.}$$

7 Changements de bases et matrices semblables

Dans ce paragraphe, E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie telle que $\dim E = p$ et $\dim F = n$.

Théorème 19. (Caractérisation base) Soient $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{B}'$ une famille quelconque de p vecteurs de E. $\mathscr{B}'$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ est inversible.

Exercice 8. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soient

$$v_1 = (1,0,2) \quad v_2 = (1,1,2) \quad \text{et} \quad v_3 = (2,1,5).$$

On note $\mathscr{B}' = (v_1, v_2, v_3)$. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Solution.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

On a $\det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')) = 5 + 2 - 4 - 2 = 1 \neq 0$, donc $\mathscr{B}'$ est une base de E.

Définition 11. (Matrice de passage) Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. On appelle *matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$* la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$, aussi notée $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$.

Remarque. $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)$.

Exemple. Dans l'exercice précédent, on a $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Théorème 20. (Propriétés des matrices de passage)
Soient $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$, $\mathscr{B}''$ trois bases de E. Alors :

- $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}} = I_p$.
- $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ est inversible et $\left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.
- $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}''} = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}''}$.

Théorème 21. (Changement de bases)
Soient $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ deux bases de E et $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ deux bases de F. On pose $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ et $Q = P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'}$.

- **Version vecteur** : Soit $x \in E$. On pose $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$.

$$\text{Alors} \quad X = PX'.$$

- **Version application linéaire** : Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On pose $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$.

$$\text{Alors} \quad \boxed{B = Q^{-1}AP.}$$

- **Version endomorphisme** : Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On pose $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$.

$$\text{Alors} \quad \boxed{B = P^{-1}AP.}$$

Méthodologie : Changement de bases

Exercice 9. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (-x + y + z, -2x + y + z, -6x + 2y + 4z) \end{array}.$$

1. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

2. Soient
$$v_1 = (1, 0, 2) \quad v_2 = (1, 1, 2) \quad \text{et} \quad v_3 = (2, 1, 5).$$
On note $\mathscr{B}' = (v_1, v_2, v_3)$. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ en utilisant la formule de changement de bases.

4. Vérifier le résultat obtenu en utilisant la définition de la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.

Définition 12. (Matrices semblables) Deux matrices carrées A et B sont dites *semblables* si et seulement s'il existe une matrice inversible P telle que
$$B = P^{-1}AP.$$

8 Rang d'une matrice

Définition 13. (Rang d'une matrice) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle *rang de* A, et on note $\mathrm{rg}(A)$, le rang de la famille des colonnes de la matrice A. On a $\mathrm{rg}(A) \leqslant \min\{n, p\}$.

On admet que le rang d'une matrice est égal au rang de ses vecteurs lignes.

Théorème 22. (Matrice inversible) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = n$.

Théorème 23. (Invariance du rang par multiplication à droite ou à gauche par une matrice inversible) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Si $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible, alors $\mathrm{rg}(PA) = \mathrm{rg}(A)$.
- Si $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ inversible, alors $\mathrm{rg}(AP) = \mathrm{rg}(A)$.

Théorème 24. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Soit $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{C}$) une base quelconque de E (resp. de F). Alors
$$\boxed{\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)).}$$

Méthodologie : Déterminer le rang d'une application linéaire.

Exercice 10. Déterminer le rang de l'application linéaire

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (-x + y + z, -2x + y + z, -6x + 2y + 4z) \end{array}.$$

Que peut-on en déduire ?