

Chapitre 18 : Applications linéaires

Dans ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et E est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

1 Définitions et opérations

Dans ce paragraphe, E et F sont des \mathbb{K} -espaces vectoriels.

Définition 1. (Application linéaire - Endomorphisme)

◆ Une *application linéaire* de E dans F est une application $f : E \rightarrow F$ telle que :

1. pour tous $x, y \in E$,

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

2. pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

◆ Une application linéaire de E dans E est appelée un *endomorphisme* de E .

L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.

Remarque. 1. Une application f est linéaire si et seulement si pour tout $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

2. Une application linéaire f vérifie $f(0_E) = 0_F$. Il suffit de remplacer λ par 0 dans l'égalité $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pour obtenir ce résultat.

3. Si $x_1, \dots, x_n \in E$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, alors

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$

Cette égalité se démontre par récurrence.

Exemple. 1. L'application identité de E est un endomorphisme de E . On rappelle que cette application est notée Id_E et que l'on a par définition $\text{Id}_E(x) = x$ pour tout $x \in E$.

2. L'application de dérivation $P \mapsto P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

3. On note E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$.

L'application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une application linéaire de

$$f \mapsto \int_0^1 f(x) dx$$

E sur \mathbb{R} .

Définition 2. (Homothétie) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle *homothétie de E de rapport* λ l'application λId_E , c'est-à-dire $E \rightarrow E$. Cette application

$$x \mapsto \lambda x$$

est un endomorphisme de E .

MÉTHODOLOGIE : MONTRER QU'UNE APPLICATION EST LINÉAIRE

Exercice 1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y) \mapsto (x, x + y, x - 2y)$$

est linéaire.

Théorème 1. (Opérations sur les applications linéaires)

Soient E, F et G des \mathbb{K} -espaces vectoriels.

- ◆ La somme de deux applications linéaires (resp. la multiplication d'une application linéaire par un scalaire) est linéaire.

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Les applications $f + g : E \rightarrow F$ et $\lambda f : E \rightarrow F$ définies par pour tout $x \in E$,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ et } (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

sont linéaires.

- ◆ La composée de deux applications linéaires est linéaire. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.
- ◆ Soient $f, f' \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g, g' \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors

$$g \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f' \text{ et } (g + g') \circ f = g \circ f + g' \circ f.$$

Remarque. Le premier point de ce théorème assure que toute combinaison linéaire d'applications linéaires est linéaire.

Théorème 2. Supposons E de dimension $n \geq 1$. Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base de E : Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) \\ &= x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n), \end{aligned}$$

où (x_1, \dots, x_n) sont les coordonnées de x dans la base \mathcal{B} .

Exercice 2. Déterminer l'expression de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(1, 0, 0) = (-1, 1), \quad f(0, 1, 0) = (2, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 0, 1) = (1, 3).$$

Définition 3. (Isomorphisme - Automorphisme)

- ◆ On appelle *isomorphisme de E sur F* toute application linéaire bijective de E sur F .
- ◆ Un isomorphisme de E sur E est aussi appelé un *automorphisme de E*. L'ensemble des automorphismes de E est noté $\text{GL}(E)$ et appelé le *groupe linéaire de E*.
- ◆ On dit que E est *isomorphe* à F s'il existe un isomorphisme de E sur F .

Théorème 3. (Opérations sur les isomorphismes)

Soient E, F et G des \mathbb{K} -espaces vectoriels.

- ◆ Si f est un isomorphisme de E sur F , alors la bijection réciproque f^{-1} est un isomorphisme de F sur E .
- ◆ Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont des isomorphismes, alors la composée $g \circ f$ est un isomorphisme de E dans G et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Démonstration. Supposons que f est un isomorphisme de E sur F . L'application f^{-1} est bijective. Montrons qu'elle est linéaire. Soient $y, y' \in F$. On a :

$$\begin{aligned} f^{-1}(\lambda y + y') & \stackrel{f \circ f^{-1} = \text{Id}_F}{=} f^{-1}(\lambda f(f^{-1}(y)) + f(f^{-1}(y'))) \\ & \stackrel{\text{linéarité de } f}{=} f^{-1}(f(\lambda f^{-1}(y) + f^{-1}(y'))) \\ & \stackrel{f^{-1} \circ f = \text{Id}_E}{=} \lambda f^{-1}(y) + f^{-1}(y'). \end{aligned}$$

L'application f^{-1} est donc linéaire. \square

MÉTHODOLOGIE : DÉTERMINER L'EXPRESSION DE f^{-1} .

Exercice 3. Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un automorphisme de \mathbb{R}^2 et déterminer f^{-1} .

$$(x, y) \mapsto (3x + y, 5x + 2y)$$

2 Noyau et image d'une application linéaire

Dans ce paragraphe, E, F sont des \mathbb{K} -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

2.1 Image directe d'un sous-espace vectoriel

Rappel (Image directe) Soit G une partie de E . On appelle *image de G par f* , et on note $f(G)$, l'ensemble des éléments $f(x)$, où x est un élément de G :

$$f(G) = \{f(x) \mid x \in G\}.$$

Remarque : $f(G) \subset F$.

Théorème 4. Si G est un sous-espace vectoriel de E , alors $f(G)$ est un sous-espace vectoriel de F .

Démonstration. 1. $f(G) \subset F$ et F est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

2. $0_F \in f(G)$, car $0_E \in G$ et $f(0_E) = 0_F$.

3. Soient $y, y' \in f(G)$. Par définition, $y = f(x)$ et $y' = f(x')$, avec $x, x' \in G$. On a donc $y + y' = f(x) + f(x') = f(x + x')$, car f est linéaire. D'où $y + y' \in f(G)$.

4. Soient $y \in f(G)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Par définition, $y = f(x)$ avec $x \in G$. On a donc $\lambda y = \lambda f(x) = f(\lambda x)$, car f est linéaire. D'où $\lambda y \in f(G)$.

Ainsi $f(G)$ est un sous-espace vectoriel de F . \square

Définition 4. On appelle *image de f* , et on note $\text{Im}(f)$, le sous-espace vectoriel $f(E)$ de F :

$$\text{Im}(f) = f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}.$$

Caractérisation

$$y \in \text{Im}(f) \iff y = f(x) \text{ avec } x \in E.$$

MÉTHODOLOGIE : DÉTERMINER UNE BASE DE $\text{Im}(f)$.

Exercice 4. Déterminer une base de l'image de l'endomorphisme

$$f : (x, y, z) \mapsto (x + 2y + z, 2x + y - z, x + 2y + z).$$

Théorème 5. Si (e_1, \dots, e_n) est une base de E , alors

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \{f(x) \mid x \in E\} \\ &= \{f(x_1e_1 + \dots + x_n e_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}\} \\ &= \{x_1f(e_1) + \dots + x_nf(e_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}\} \\ &= \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)). \end{aligned}$$

□

Rappel (Application surjective) Une application $f : E \rightarrow F$ est dite *surjective* si tout élément de F admet au moins un antécédent par f :

$$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y.$$

Théorème 6. $f : E \rightarrow F$ est surjective si et seulement si $\text{Im}(f) = F$.

2.2 Image réciproque d'un sous-espace vectoriel

Rappel (Image réciproque) Soit H une partie de F . On appelle *image réciproque de H par f* , et on note $f^{-1}(H)$, l'ensemble des éléments x de E tels que $f(x) \in H$:

$$f^{-1}(H) = \{x \in E \mid f(x) \in H\}.$$

Remarque : $f^{-1}(H) \subset E$.

Théorème 7. Si H est un sous-espace vectoriel de F , alors $f^{-1}(H)$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration. 1. $f^{-1}(H) \subset E$ et E est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

2. $0_E \in f^{-1}(H)$, car $0_F \in H$ et $f(0_E) = 0_F$.

3. Soient $x, x' \in f^{-1}(H)$. Par définition, $f(x) \in H$ et $f(x') \in H$. On a donc $f(x + x') = f(x) + f(x') \in H$, car H est un sous-espace vectoriel de F . D'où $x + x' \in f^{-1}(H)$.

4. Soient $x \in f^{-1}(H)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Par définition, $f(x) \in H$. On a donc $f(\lambda x) = \lambda f(x) \in H$, car H est un sous-espace vectoriel de F . D'où $\lambda x \in f^{-1}(H)$.

Ainsi $f^{-1}(H)$ est un sous-espace vectoriel de E . □

Définition 5. On appelle *noyau de f* , et on note $\text{Ker} f$, le sous-espace vectoriel $f^{-1}(0_F)$ de E :

$$\text{Ker} f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}.$$

Caractérisation

$$x \in \text{Ker}(f) \iff f(x) = 0$$

MÉTHODOLOGIE : DÉTERMINER $\text{Ker}(f)$

Exercice 5. Déterminer une base du noyau de l'application linéaire

$$f : (x, y, z) \mapsto (2x + y - z, x - y).$$

Rappel (Application injective) Une application $f : E \rightarrow F$ est dite *injective* si tout élément de F admet au plus un antécédent par f :

$$f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

Théorème 8. L'application f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Démonstration. \Rightarrow On suppose que f est injective.

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(f) &\iff f(x) = 0_F \\ &\iff f(x) = f(0_E) \\ &\iff x = 0_E, \end{aligned}$$

car f est injective. Donc $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

\Leftarrow On suppose que $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$. Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Alors $f(x) - f(x') = 0_F$, ie $f(x - x') = 0_F$. Donc $x - x' \in \text{Ker}(f)$ et $x - x' = 0_E$ par hypothèse. D'où $x = x'$. On en déduit que f est injective. \square

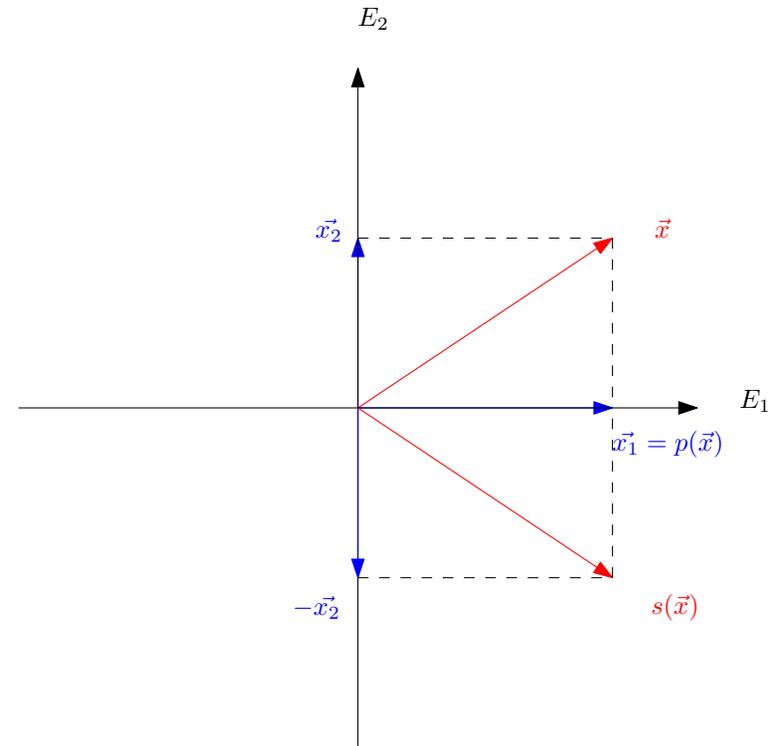
3 Projections et symétries

Dans ce paragraphe, E est un \mathbb{K} -espace vectoriel et E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E :

$$E_1 \oplus E_2 = E.$$

On rappelle que tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique

$$x = \underbrace{x_1}_{\in E_1} + \underbrace{x_2}_{\in E_2}.$$



Définition 6. ♦ On note $p : E \rightarrow E$ l'application définie par

$$p(x) = x_1$$

pour tout $x \in E$. L'application p est linéaire. On l'appelle *projection sur E_1 parallèlement à E_2* ou encore *projecteur sur E_1 de direction E_2* . On a :

$$p(x) = 0 \iff x \in E_2 \quad \text{et} \quad p(x) = x \iff x \in E_1.$$

♦ On note $s : E \rightarrow E$ l'application définie par

$$s(x) = x_1 - x_2$$

pour tout $x \in E$. L'application s est linéaire. On l'appelle *symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2* ou encore *symétrie par rapport à E_1 de direction E_2* . On a :

$$s(x) = -x \iff x \in E_2 \quad \text{et} \quad s(x) = x \iff x \in E_1.$$

Remarque. On a $s = 2p - \text{Id}_E$. En effet, pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} (2p - \text{Id}_E)(x) &= 2p(x) - x \\ &= 2x_1 - (x_1 + x_2) \\ &= x_1 - x_2 \\ &= s(x). \end{aligned}$$

Théorème 9. (Caractérisation des projecteurs)

Soit $p : E \rightarrow E$ une application.

p est un projecteur si et seulement si (p est linéaire et $p \circ p = p$).

Dans ce cas, $\text{Im}(p)$ et $\text{Ker}(p)$ sont des supplémentaires de E et p est la projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$.

Théorème 10. (Caractérisation des symétries)

Soit $s : E \rightarrow E$ une application.

s est une symétrie si et seulement si (s est linéaire et $s \circ s = \text{Id}_E$).

Dans ce cas, $\text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(s + \text{Id}_E)$ sont des supplémentaires de E et s est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{Id}_E)$.

4 Rang

4.1 Rang d'une famille finie de vecteurs

Définition 7. (Rang d'une famille finie de vecteurs)

Soient x_1, \dots, x_n des vecteurs de E . La dimension de l'espace $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est appelée le *rang de la famille* (x_1, \dots, x_n) .

Notation : $\text{rg}(x_1, \dots, x_n)$.

Remarque. On a $\text{rg}(x_1, \dots, x_n) \leq n$ et $\text{rg}(x_1, \dots, x_n) = n$ si et seulement si la famille (x_1, \dots, x_n) est libre.

Exemple. 1. $\text{rg}(1, X, X^2, X^3) = 4$,

2. $\text{rg}(X, 2X, 3X) = 1$,

3. $\text{rg}\left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right) = 2$,

4. $\text{rg}\left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)\right) = 2$.

MÉTHODOLOGIE : DÉTERMINER LE RANG D'UNE FAMILLE DE VECTEUR \equiv Déterminer le nombre de pivots non nuls en opérant sur les colonnes.

4.2 Applications linéaires de rang fini

Définition 8. (Application linéaire de rang fini) Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- ◆ On dit que f est de *rang fini* si $\text{Im}(f)$ est de dimension finie, et de *rang infini* sinon.
- ◆ Si f est de rang fini, on appelle *rang de f* , et on note $\text{rg}(f)$, la dimension de $\text{Im}(f)$.

Remarque. Lien entre rang d'une famille de vecteurs et rang d'une application dans le cas où E est de dimension finie non nulle. Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E . On a :

$$\text{rg}(f) = \dim \text{Im}(f) = \dim \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

MÉTHODOLOGIE : DÉTERMINER LE RANG D'UNE APPLICATION LINÉAIRE.

Exercice 6. Déterminer le rang de l'endomorphisme de \mathbb{R}^3

$$f : (x, y, z) \mapsto (x + 2y + z, 2x + y - z, x + 2y + z).$$

Théorème 11. (Rang d'une composée)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :

$$\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(g), \text{rg}(f)).$$

Théorème 12. (Invariance du rang par composition à droite ou à gauche par un isomorphisme)

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et G un \mathbb{K} -espace vectoriel.

- ◆ Si φ est un isomorphisme de G sur E , alors $\text{rg}(f \circ \varphi) = \text{rg}(f)$.
- ◆ Si ψ est un isomorphisme de F sur G , alors $\text{rg}(\psi \circ f) = \text{rg}(f)$.

Théorème 13. (Théorème du rang)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si E est de dimension finie, alors f est de rang fini et

$$\dim E = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f).$$

5 Isomorphismes

Théorème 14. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soient (e_1, \dots, e_n) une base de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
 f est un isomorphisme si et seulement si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F .

Corollaire 1. Soient E et F de dimension finie. Alors :

E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim E = \dim F$.

Théorème 15. Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\dim E = \dim F$, alors :

f est bijective $\iff f$ est injective $\iff f$ est surjective.

Démonstration. C'est une conséquence du théorème du rang. Montrons que f injective $\iff f$ surjective lorsque $\dim E = \dim F$.

\implies Si f est injective, alors $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ et $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$. On en déduit que $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)) = \dim E$. On a donc $\text{Im}(f) \subset F$ et $\dim(\text{Im}(f)) = \dim F$, car $\dim E = \dim F$. D'où $\text{Im}(f) = F$ et f est surjective.

\impliedby Si f est surjective, alors $\text{Im}(f) = F$ et $\text{rg}(f) = \dim F = \dim E$. On en déduit que $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$, d'après le théorème du rang, et donc que f est injective. \square

Corollaire 2. Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

f est bijective $\iff f$ est injective $\iff f$ est surjective.

MÉTHODOLOGIE : MONTRER QU'UNE APPLICATION EST UN AUTOMORPHISME.

Exercice 7. Montrer que l'application $\varphi : (x, y, z) \mapsto (x + y, -x + y, z)$ est un automorphisme de \mathbb{R}^3 .

Contre-exemple en dimension infinie. Soit

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}[X] &\rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\mapsto XP(X) \end{aligned} .$$

$\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$, φ est injective (vérifier que $\text{Ker} \varphi = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$), mais elle n'est pas surjective (1 n'admet pas d'antécédent par φ).

6 Représentation matricielle en dimension finie

Dans ce paragraphe, E et F sont des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie telle que $\dim E = p$ et $\dim F = n$.

Définition 9. (Matrice d'une famille de vecteurs dans une base)

Soient $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F et $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_q)$ une famille quelconque de vecteurs de F . La *matrice de \mathcal{F} dans la base \mathcal{C}* , notée $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})$, est la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ dont les coefficients de la j -ième colonne sont les coordonnées de x_j dans la base \mathcal{C} .

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}) = \begin{array}{cccc} & x_1 & x_2 & \dots & x_j & \dots & x_q & \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \left(\begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,q} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,q} \end{array} \right) & \left[\begin{array}{c} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{array} \right] & \dots & \left[\begin{array}{c} a_{1,q} \\ a_{2,q} \\ \vdots \\ a_{n,q} \end{array} \right] & \leftarrow f_1 \\ & & & & \leftarrow f_2 \\ & & & & \leftarrow f_n \end{array}$$

$$\uparrow$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(x_j)$$

Exemple. Dans $\mathbb{R}_3[X]$:

$$P_1 = 1 + 2X + X^3, \quad P_2 = X + X^2, \quad P_3 = 1 - 2X^2 + X^3.$$

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{F} = (P_1, P_2, P_3)$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En opérant sur les colonnes de cette matrice, on montre que $\text{rg}(\mathcal{F}) = 2$.

Définition 10. (Matrice d'une application linéaire) Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E , $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. La *matrice de f dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{C}* , notée $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$, est la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les coefficients de la j -ième colonne sont les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base \mathcal{C} .

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{array}{cccc} & f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_j) & \dots & f(e_p) & \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \left(\begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{array} \right) & \left[\begin{array}{c} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{array} \right] & \dots & \left[\begin{array}{c} a_{1,p} \\ a_{2,p} \\ \vdots \\ a_{n,p} \end{array} \right] & \leftarrow f_1 \\ & & & & \leftarrow f_2 \\ & & & & \leftarrow f_n \end{array}$$

$$\uparrow$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_j))$$

Si $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, alors la matrice de f dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B} s'appelle aussi *la matrice de f dans la base \mathcal{B}* et se note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Exemple. 1. Soit \mathcal{B} une base quelconque de E , alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = I_p$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y) = (x + y, -x + 2y, y)$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3}(f)$, où \mathcal{B}_2 et \mathcal{B}_3 sont les bases canoniques respectives de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .

On a $f(1, 0) = (1, -1, 0)$ et $f(0, 1) = (1, 2, 1)$. D'où

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_3}(f)$, où $\mathcal{B}'_2 = ((0, 1), (1, 0))$ et $\mathcal{B}'_3 = ((0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1))$.

On a $f(0, 1) = (1, 2, 1) = 1 \times (0, 1, 0) + 1 \times (1, 0, 0) + 1 \times (0, 1, 1)$ et

$f(1, 0) = (1, -1, 0) = -1 \times (0, 1, 0) + 1 \times (1, 0, 0) + 0 \times (0, 1, 1)$. D'où

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Attention : Si on change les bases, on change la matrice !

Théorème 16. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $x \in E$ et $y \in F$. Si $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$, $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(y)$, alors :

$$y = f(x) \iff Y = AX.$$

Théorème 17. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f + g) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) + \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(g)$$

et

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\lambda f) = \lambda \times \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f).$$

Théorème 18. ♦ L'application $f \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E, F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

En particulier,

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = \dim E \times \dim F.$$

♦ L'application $f \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
En particulier,

$$\dim \mathcal{L}(E) = \dim \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) = (\dim E)^2.$$

♦ Soient E, F, G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie, de bases respectives $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{D}}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f).$$

Corollaire 3. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. L'application f est un isomorphisme si et seulement si la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ est inversible. De plus, si f est un isomorphisme, alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f))^{-1}.$$

7 Changements de bases et matrices semblables

Dans ce paragraphe, E et F sont des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie telle que $\dim E = p$ et $\dim F = n$.

Théorème 19. (Caractérisation base) Soient \mathcal{B} une base de E et \mathcal{B}' une famille quelconque de p vecteurs de E . \mathcal{B}' est une base de E si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ est inversible.

Exercice 8. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Soient

$$v_1 = (1, 0, 2) \quad v_2 = (1, 1, 2) \quad \text{et} \quad v_3 = (2, 1, 5).$$

On note $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$. Montrer que \mathcal{B}' est une base de \mathbb{R}^3 .

Solution.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

On a $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')) = 5 + 2 - 4 - 2 = 1 \neq 0$, donc \mathcal{B}' est une base de E .

Définition 11. (Matrice de passage) Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E . On appelle *matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}'* la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$, aussi notée $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

Remarque. $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_E)$.

Exemple. Dans l'exercice précédent, on a $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Théorème 20. (Propriétés des matrices de passage) Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ trois bases de E . Alors :

- ♦ $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = I_p$.
- ♦ $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est inversible et $(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.
- ♦ $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} \times P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$.

Théorème 21. (Changement de bases)

Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E et $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux bases de F . On pose $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et $Q = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$.

- ◆ **Version vecteur** : Soit $x \in E$. On pose $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$.

$$\text{Alors } X = PX'.$$

- ◆ **Version application linéaire** : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On pose $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(f)$.

$$\text{Alors } B = Q^{-1}AP.$$

- ◆ **Version endomorphisme** : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

$$\text{Alors } B = P^{-1}AP.$$

MÉTHODOLOGIE : CHANGEMENT DE BASES

Exercice 9. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Soit

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (-x + y + z, -2x + y + z, -6x + 2y + 4z).$$

- Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
- Soient $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (1, 1, 2)$ et $v_3 = (2, 1, 5)$.
On note $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$. Montrer que \mathcal{B}' est une base de \mathbb{R}^3 .
- Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ en utilisant la formule de changement de bases.
- Vérifier le résultat obtenu en utilisant la définition de la matrice de f dans la base \mathcal{B}' .

Définition 12. (Matrices semblables) Deux matrices carrées A et B sont dites *semblables* si et seulement si il existe une matrice inversible P telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

8 Rang d'une matrice

Définition 13. (Rang d'une matrice) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle *rang* de A , et on note $\text{rg}(A)$, le rang de la famille des colonnes de la matrice A . On a $\text{rg}(A) \leq \min\{n, p\}$.

On admet que le rang d'une matrice est égal au rang de ses vecteurs lignes.

Théorème 22. (Matrice inversible) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si $\text{rg}(A) = n$.

Théorème 23. (Invariance du rang par multiplication à droite ou à gauche par une matrice inversible) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- ◆ Si $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible, alors $\text{rg}(PA) = \text{rg}(A)$.
- ◆ Si $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ inversible, alors $\text{rg}(AP) = \text{rg}(A)$.

Théorème 24. Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit \mathcal{B} (resp. \mathcal{C}) une base quelconque de E (resp. de F). Alors

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)).$$

MÉTHODOLOGIE : DÉTERMINER LE RANG D'UNE APPLICATION LINÉAIRE.

Exercice 10. Déterminer le rang de l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (-x + y + z, -2x + y + z, -6x + 2y + 4z).$$

Que peut-on en déduire ?