Chapitre 19 : Probabilités sur un univers fini

1 Éléments de probabilités

Dans ce cours, nous nous contentons d'étudier les probabilités définies sur des ensembles finis.

1.1 Vocabulaire

En probabilités, une **expérience aléatoire** est une expérience renouvelable, et qui, renouvelée dans des conditions parfaitement identiques, ne donne pas forcément le même **résultat**. L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé l'**univers** de l'expérience et est très souvent noté Ω. Les **résultats** d'une expérience sont aussi appelés **issues** ou **réalisations**.

Exemple.

- Lancer de dé : L'expérience du lancer de dé à 6 faces peut conduire à 6 résultats différents. Dans ce cas, $\Omega = [\![1, 6]\!]$.
- Pile ou face : Deux lancers successifs d'une pièce peuvent conduire à 4 résultats : PP, PF, FP, FF si on choisit d'associer « P » à l'obtention d'un pile et « F » à l'obtention d'un face. Dans ce cas, $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$.

Définition 1. On considère une expérience aléatoire d'univers Ω.
Chacun des résultats possibles s'appelle **événement élémentaire** ou **issue**.
On appelle **événement** tout sous-ensemble ou partie de Ω :

$$\{\text{événements}\} = \mathscr{P}(\Omega).$$

Remarque. Un événement est constitué de zéro, un ou plusieurs événements élémentaires.

Exemple. Le lancer d'un dé à six faces est une expérience aléatoire d'univers $\Omega = [\![1, 6]\!]$.

- le singleton $\{5\}$ est un événement élémentaire.
- l'ensemble $E_1 = \{2, 4, 6\}$ est un événement. En français, cet événement peut se traduire par la phrase : « le résultat du dé est un nombre pair ».
- L'ensemble $E_2 = \{1, 2, 3\}$ est un autre événement. Cet événement peut se traduire par la phrase : « le résultat du dé est strictement inférieur à 4 »

Ces événements peuvent être représentés par un diagramme.

Soit Ω un ensemble fini.

- l'**événement impossible** est la partie vide, noté $\emptyset$: aucune issue ne le réalise.
- l'**événement certain** est Ω : toutes les issues le réalisent.
- l'**événement contraire** de A, noté $\overline{A}$ est l'ensemble des issues de Ω qui n'appartiennent pas à A.
- l'événement $A \cup B$ est l'ensemble des issues qui appartiennent soit à A, soit à B soit aux deux ensembles.

- l'événément $A \cap B$ est l'ensemble des issues qui appartiennent à la fois à A et à B.

- Deux événements A et B sont dits **incompatibles**, s'ils sont disjoints, *i.e.* si $A \cap B = \emptyset$.

- On appelle **système complet d'événements de** Ω tout ensemble d'événements $\{A_1, \ldots, A_n\}$

  ⋆ deux à deux incompatibles : $\quad$ Si $\quad i \neq j, \quad$ alors $\quad A_i \cap A_j = \emptyset$.

  ⋆ dont la réunion est Ω : $\quad \Omega = \displaystyle\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$.

Exemple. Si A est un événement quelconque de Ω, alors $(A, \overline{A})$ constitue un système complet d'événements.

Définition 2. (Probabilité sur un univers fini) Soit Ω l'univers fini d'une expérience aléatoire. On appelle **loi de probabilité sur** Ω toute application P telle que :

- $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0, 1]$,
- $P(\Omega) = 1$,
- (additivité) $\forall A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$,

$$\text{Si } A \cap B = \emptyset, \text{ alors } P(A \sqcup B) = P(A) + P(B).$$

L'ensemble Ω est appelé **univers fini**.

Définition 3. Un couple (Ω, P) où Ω est un univers fini muni d'une probabilité P s'appelle un **espace probabilisé fini**.

1.2 Propriétés

Proposition 1. (Propriétés des probabilités) Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$.

- $P(\emptyset) = 0$.
- $P(\Omega) = 1$.
- **Complémentaire et différence** :

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \quad \text{et} \quad P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B).$$

- **Croissance de** P : Si $A \subset B$, alors $P(A) \leqslant P(B)$.
- **Réunion** : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- **Réunion disjointe** : Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des événements deux à deux incompatibles, alors

$$P\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Une probabilité est entièrement déterminée par la probabilité des événements élémentaires :

Théorème 1. Soit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ et $p_1, \ldots, p_n$ sont des réels positifs tels que leur somme vaut 1, *i.e.* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, alors il existe une unique probabilité P sur Ω telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad P(\{\omega_i\}) = p_i.$$

En particulier, pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$: $P(A) = \displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ \omega_i \in A}} p_i$.

Exemple. Soient $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$ et $P : \mathscr{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ additive telle que

$$P(a) = \frac{1}{20}, \quad P(b) = \frac{1}{4}, \quad P(c) = \frac{1}{5}, \quad P(d) = \frac{1}{10}, \quad P(e) = \frac{2}{5}.$$

P est à valeurs positives et

$$P(\Omega) = P(a) + P(b) + P(c) + P(d) + P(e) = 1.$$

Donc P est une probabilité sur Ω. Si $A = \{a, c\}$,

$$P(A) = P(a) + P(c) = \frac{1}{4}.$$

1.3 Équiprobabilité ou probabilité uniforme

Hypothèse d'équiprobabilité : Si l'ensemble Ω des résultats possibles d'une expérience aléatoire est fini, de cardinal n, et si a priori il n'y a aucune raison que l'un des résultats soit obtenu plus souvent qu'un autre, on suppose que les résultats sont **équiprobables**, autrement dit que tous ont la même probabilité d'être obtenus.

Cette probabilité vaut alors :

$$\frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{1}{n}.$$

Définition 4. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Deux événements A et B sont dits **équiprobables** si $P(A) = P(B)$.

Définition 5. (Probabilité uniforme sur un univers fini) Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. On dit que la probabilité P est uniforme si pour tout événement élémentaire $\omega \in \Omega$, $P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$. Dans ce cas, pour tout événement $A \in \mathscr{P}(\Omega)$:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Exemple. L'exemple type de cette situation est celui du dé équilibré qu'on lance une fois. On note $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ l'ensemble des résultats possibles. On définit sur Ω la probabilité uniforme P en posant : pour tout $i \in [\![1, 6]\!]$, $P(i) = \frac{1}{6}$. Si on note A l'événement « *le dé est tombé sur un numéro pair* », alors $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

2 Indépendance et conditionnement

Dans la suite du cours, (Ω, P) désigne un espace probabilisé fini.

Définition 6. Soient $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $P(B) \neq 0$. On appelle **probabilité conditionnelle de A sachant B** le réel

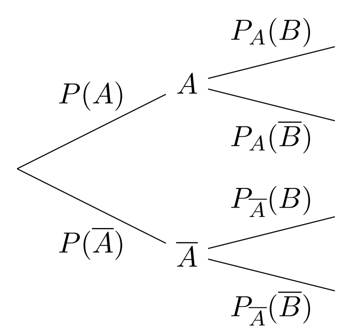
$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

On la note aussi $P(A|B)$.

Exemple. Si on lance un dé équilibré, notons A l'événement « *le résultat est* 2 *ou* 3 » et B l'événement « *le résultat est pair* ». On a $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. $A \cap B$ est l'événement « *le résultat est* 2 » et donc $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Ainsi

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}.$$

Représentation par un arbre pondéré.



$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$$

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P_A\left(\overline{B}\right)$$

$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B)$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right)$$

Définition 7. Deux événements A et B sont dits **indépendants** si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Plus généralement, n événements $A_1, \ldots, A_n$ sont **mutuellement indépendants** si pour toute sous-famille $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$, on a :

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \times \cdots \times P(A_{i_k}).$$

Remarque. En d'autres termes, n événements $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants si la probabilité de l'intersection d'un nombre fini d'entre eux est égale au produit de leur probabilité. Ainsi par exemple, trois événements A, B, C sont mutuellement indépendants si toutes les conditions suivantes sont réalisées :

1. $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$,
2. $P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$,
3. $P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$,
4. $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$.

Il ne faut pas confondre l'indépendance mutuelle de n événements et l'indépendance deux à deux de ces n événements. On a

$$\text{indépendance mutuelle} \Longrightarrow \text{indépendance deux à deux},$$

mais la réciproque est fausse lorsque $n \geqslant 3$.

Exemple. On considère un événements à 8 événements élémentaires muni de la probabilité uniforme : $(\Omega = [\![1, 8]\!], P)$. Soient $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 5, 6\}$ et $C = \{3, 4, 5, 6\}$. On a :

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}.$$

Les événements A et B sont indépendants car $P(A \cap B) = P(\{1, 2\}) = \frac{1}{4} = P(A) \times P(B)$.

Les événements A et C sont indépendants car $P(A \cap C) = P(\{3, 4\}) = \frac{1}{4} = P(A) \times P(C)$.

Les événements B et C sont indépendants car $P(B \cap C) = P(\{5, 6\}) = \frac{1}{4} = P(B) \times P(C)$.

Mais les événements A, B, C ne sont pas mutuellement indépendants car $P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A) \times P(B) \times P(C)$.

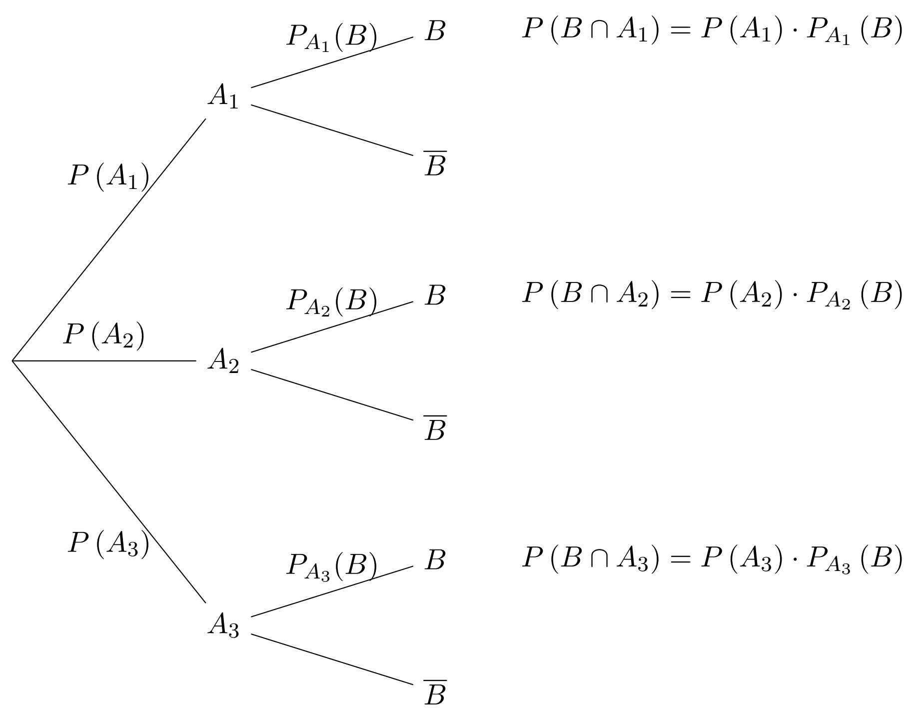
Théorème 2. (Formule des probabilités totales) Si $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un système complet d'événements tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(A_i) \neq 0$, et si B est un événement quelconque, alors

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B)\, P(A_i).}$$

En particulier, si A est un évenement tel que $P(A) \neq 0$ et $P(\overline{A}) \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) \\ &= P_A(B)P(A) + P_{\overline{A}}(B)P(\overline{A}). \end{aligned}$$

Représentation par un arbre pondéré.



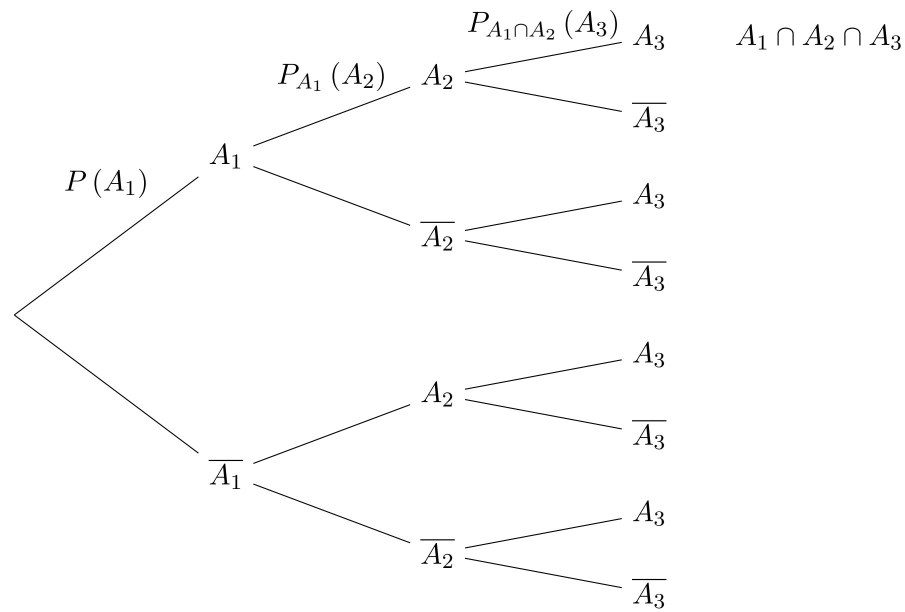
$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) \\ &= P(A_1) \cdot P_{A_1}(B) + P(A_2) \cdot P_{A_2}(B) + P(A_3) \cdot P_{A_3}(B) \end{aligned}$$

Exercice 1. On dispose de trois urnes U_1, U_2, U_3. Chacune contient 10 boules. U_1 contient 1 boule blanche, U_2 contient deux boules blanches et U_3 en contient 6. On tire au hasard une boule. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

Théorème 3. (Formule des probabilités composées) Soient $A_1, \dots, A_n$ n événements tels que $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors :

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots$$
$$\cdots \times P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Représentation par un arbre pondéré.



$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3)$$

Exercice 2. Une urne contient initialement 7 boules noires et 3 boules blanches. On tire successivement 3 boules : si on tire une boule noire, on l'enlève, si on tire une boule blanche, on la retire et on ajoute une boule noire à la place. Quelle est la probabilité de tirer 3 boules blanches à la suite ?

Théorème 4. (Formule de Bayes)

- Si A et B sont deux événements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, alors
$$\boxed{P_B\,(A) = \frac{P_A\,(B)\,P(A)}{P(B)}.}$$
- En particulier, si A est un évenement tel que $P(A) \neq 0$ et $P(\overline{A}) \neq 0$, alors
$$\boxed{P_B\,(A) = \frac{P_A\,(B)\,P(A)}{P_A\,(B)\,P(A) + P_{\overline{A}}\,(B)\,P(\overline{A})}}$$

Démonstration.

Par définition, $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ et $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$,

donc $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$,

d'où $P_B(A) = \dfrac{P_A(B) \times P(A)}{P(B)}$.

La seconde version est une conséquence de la formule des probabilités totales.

Exercice 3. Tests de dépistage : Une maladie est présente dans la population dans la proportion d'une personne malade sur 10000. Un laboratoire pharmaceutique propose un nouveau test de dépistage : si une personne est malade, le test est positif à 99%. Si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0,1%. Quelle est la probabilité qu'une personne soit malade si le test est positif ? Qu'en pensez-vous ?

3 Variables aléatoires réelles sur un univers fini

3.1 Variable aléatoire

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.

- **Variable aléatoire -** Une variable aléatoire réelle sur (Ω, P) est simplement une application de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$X : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}.$$

- **Support -** L'image de X, $X(\Omega)$, s'appelle le support de X. Si l'image de X est fini, on dit que X est **à support fini**.

- **La notation** $(X \in A)$ **-** Pour tout $A \subset \mathbb{R}$, on note $(X \in A)$ l'événement $X^{-1}(A)$:

$$(X \in A) = X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) \in A\}.$$

- **La notation** $(X = x)$ **-** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note

$$(X = x) = X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) = x\}.$$

- **La notation** $(X \leqslant x)$ **-** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note

$$(X \leqslant x) = X^{-1}(\,]-\infty, x]\,) = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) \leqslant x\}.$$

Définition 8. (Loi d'une variable aléatoire) Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire. On appelle **loi de** X l'application

$$\begin{array}{ccc} X(\Omega) & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & P(X = x) \end{array}.$$

Exercice 4. On lance deux dés, un bleu et un rouge, et on note X le nombre de 6 obtenus. X est une variable aléatoire réelle.

1. Déterminer Ω.
2. Déterminer le support de X.
3. Expliciter les événements $(X = 1)$ et $(X \geqslant 2)$.
4. Déterminer la loi de X.

Définition 9. (Fonction de répartition) Soit X est une variable aléatoire réelle. La fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F_X(x) = P(X \leqslant x)$$

est appelée la **fonction de répartition** de la variable aléatoire X.

Remarque. Si X est une variable aléatoire réelle, alors :

- F_X est une application de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$.
- F_X est croissante.
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.
- Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a).$$

Exercice 5. On lance un dé à six faces et on note X la variable aléatoire donnée par le résultat obtenu.

1. Déterminer le support de X.
2. Déterminer la loi de X.
3. Déterminer et représenter la fonction de répartition F_X de X.

Définition 10. (Image d'une variable aléatoire par une fonction) Soient X une variable aléatoire sur Ω et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. La variable aléatoire $\varphi \circ X : \Omega \to \mathbb{R}$ est notée $\varphi(X)$. La loi $P_{\varphi(X)}$ de $\varphi(X)$ est entièrement déterminée par φ et la loi de X.
Précisément pour tout $y \in \varphi(X(\Omega))$:

$$P\left(\varphi(X) = y\right) = \sum_{x \in X(\Omega) \text{ tels que } \varphi(x) = y} P(X = x).$$

Exercice 6. Soit X la variable aléatoire donnée par

k	-2	-1	0	1	2
$P(X = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

On pose $Y = X^2$. Déterminer la loi de Y.

3.2 Espérance

Définition 11. (Espérance) Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω. L'**espérance** $E(X)$ **de** X est la valeur moyenne de X, c'est-à-dire le réel

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x).$$

En particulier si $X(\Omega) \subset \{1, \ldots, n\}$, on écrit

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} k P(X = k),$$

où $P(X = k) = 0$ si $k \notin X(\Omega)$.

Définition 12. Une variable aléatoire est dite **centrée** si $E(X) = 0$.

Exercice 7. Reprendre l'exercice précédent et calculer $E(X)$.

Théorème 5. Soient X une variable aléatoire réelle sur Ω et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. L'espérance de la variable aléatoire $\varphi(X)$ est donnée par la formule

$$E(\varphi(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \varphi(x) P(X = x).$$

Exemple. On lance un dé à six faces et on note X la variable aléatoire donnée par le résultat obtenu. Que vaut l'espérance de X^2 ?

Proposition 2.

- E est linéaire : Soient X et Y des variables aléatoires réelles sur Ω. On a

$$\text{Pour tous } a, b \in \mathbb{R}, \quad E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$$

- Si X est constante, *i.e.* $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) = a$, alors

$$E(X) = a.$$

3.3 Variance et écart type

Définition 13. (Variance et écart-type) Soit X une variable aléatoire réelle.

- On appelle **variance de** X le réel positif

$$V(X) = E\big((X - E(X))^2 \big).$$

- On appelle **écart-type de** X le réel $\quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
- Une variable aléatoire X est dite **réduite** si $V(X) = 1$.

Remarque.

- $V(X) = 0 \iff X$ est constante.
- La variance est un indicateur de dispersion : elle indique de quelle manière la variable aléatoire X se disperse autour de sa moyenne $E(X)$. Elle permet notamment de dire si un groupe est homogène (variance faible) ou hétérogène (variance élevée).

Théorème 6. (Propriétés de la variance) Soit X une variable aléatoire réelle.

- **Formule de Koenig-Huygens :** $\boxed{V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2.}$
- Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $\quad V(aX+b) = a^2 V(X)$.

Démonstration de la formule de Koenig-Huygens.

$$\begin{aligned}
V(X) &= E\big((X-E(X))^2 \big) \\
&= E\left(X^2 - \underbrace{2E(X)}_{\in\mathbb{R}} \cdot X + E(X)^2 \right) \\
&= E\left(X^2\right) - 2E(X)E\left(X\right) + E\left(\underbrace{E(X)^2}_{\text{constante}} \right) \\
&\text{(par linéarité de } E) \\
&= E\left(X^2\right) - 2E\left(X\right)^2 + E(X)^2 \\
&= E\left(X^2\right) - E\left(X\right)^2.
\end{aligned}$$

Exemple. On lance un dé à six faces et on note X la variable aléatoire donnée par le résultat obtenu. Calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Proposition 3. Si $\sigma(X) \neq 0$, alors la variable aléatoire $Y = \frac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

Démonstration.

$Y = \frac{X-E(X)}{\sigma(X)}$

$$\begin{aligned}
E(Y) &= E\left(\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}\right) \\
&= \frac{1}{\sigma(X)} E\left(X - E(X)\right) && \text{(linéarité de } E) \\
&= \frac{1}{\sigma(X)} \left(E\left(X\right) - E\left(E(X)\right)\right) && \text{(linéarité de } E) \\
&= \frac{1}{\sigma(X)} \left(E\left(X\right) - E\left(X\right)\right) && \text{(car } E(X) \text{ est constante)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

donc Y est centrée.

$$\begin{aligned}
V(Y) &= V\left(\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sigma(X)}\right)^2 V\left(X - E(X)\right) && (\text{car } V(a\bar{X}) = a^2 V(\bar{X})) \\
&= \frac{1}{\sigma(X)^2} V(X) && (\text{car } V(X+b) = V(X)) \\
&= 1. && (\text{car } \sigma(X) = \sqrt{V(X)})
\end{aligned}$$

Donc Y est réduite.

Théorème 7. (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) Soit X une variable aléatoire réelle. Pour tout $a > 0$,

$$P\left(|X - E(X)| \geqslant a\right) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}.$$

4 Lois usuelles

Soit X une variable aléatoire réelle.

4.1 Loi certaine

Définition 14. On dit que X suit la **loi certaine** si elle ne prend qu'une seule valeur, c'est-à-dire si :

1. $X(\Omega) = \{a\}$, avec $a \in \mathbb{R}$,
2. $P(X = a) = 1$.

Dans ce cas,

$$E(X) = a \quad \text{et} \quad V(X) = 0.$$

Exemple. Une urne contient n boules numérotées 1. On tire une boule de l'urne au hasard. On note X la variable aléatoire égale au numéro obtenu. La variable aléatoire X suit une loi certaine.

4.2 Loi uniforme $\mathcal{U}([\![1, n]\!])$

Définition 15. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On dit que X suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}\left([\![1, n]\!]\right)$, si :

1. $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$,
2. pour tout $k \in [\![1, n]\!] \quad P(X = k) = \frac{1}{n}$.

Dans ce cas,

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

Exemple. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule de l'urne au hasard. On note X la variable aléatoire égale au numéro obtenu. La variable aléatoire X suit une loi uniforme $\mathcal{U}([\![1, n]\!])$.

4.3 Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$

Définition 16. Soit $p \in [0, 1]$. On dit que X suit la **loi de Bernoulli de paramètre** p , et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$, si :

1. $X(\Omega) = \{0, 1\}$,
2. $P(X = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X = 0) = 1 - p$.

Dans ce cas,

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1 - p).$$

Exemple. On joue à pile ou face avec une pièce de monnaie non équilibrée. La probabilité que la pièce tombe sur « pile » est p. On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si la pièce tombe sur « pile » et 0 sinon. La variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$.

Exercice 8. Une urne contient N boules, dont k blanches et $N - k$ noires. On tire une boule au hasard. On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule tirée est blanche et 0 sinon. Déterminer la loi de X.

4.4 Loi binomiale de paramètres $\mathcal{B}(n,p)$

Définition 17. Soients $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. On dit que X suit la **loi binomiale de paramètre** (n,p), et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, si :

1. $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$,
2. pour tout $k \in [\![0,n]\!]$: $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Dans ce cas,

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p).$$

Exemple. On joue n fois à pile ou face avec une pièce truquée, telle que la probabilité de tomber sur « pile » soit p, avec $0 < p < 1$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on a obtenu « pile » au cours des n lancers. La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Exercice 9. Une urne contient N boules de deux catégories : a boules blanches et b boules noires ($a+b=N$). On effectue n tirages avec remise dans cette urne. On note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches (resp. noires) obtenues au cours des n tirages.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

Récapitulatif

Loi certaine

$$\boxed{\begin{array}{rcl} X(\Omega) &=& \{a\} \\ P(X=a) &=& 1 \\ E(X) &=& a \\ V(X) &=& 0 \end{array}}$$

Loi uniforme : $X \hookrightarrow \mathcal{U}\left([\![1,n]\!]\right)$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} X(\Omega) &=& [\![1,n]\!] \\ P(X=k) &=& \dfrac{1}{n} \\ E(X) &=& \dfrac{n+1}{2} \\ V(X) &=& \dfrac{n^2-1}{12} \end{array}}$$

Loi de Bernoulli : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p)$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} X(\Omega) &=& \{0,1\} \\ P(X=1) &=& p \\ P(X=0) &=& 1-p \\ E(X) &=& p \\ V(X) &=& p(1-p) \end{array}}$$

Loi binomiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} X(\Omega) &=& [\![0,n]\!] \\ P(X=k) &=& \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ E(X) &=& np \\ V(X) &=& np(1-p) \end{array}}$$