Chapitre 2 : Équations et inéquations

Un chapitre, un mathématicien

Mohammed Al Khwarizmi (Khiva 788 – Bagdad 850)

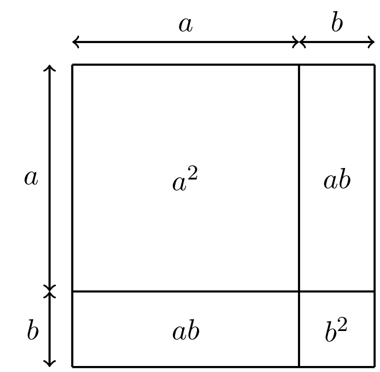
Première page du
Kitab al jabr w'al muqabalah

Originaire de la région du Kharezm, dans l'ouest de l'Ouzbékistan actuel, le mathématicien et astronome Mohammed Al Khwarizmi demeure à Bagdad à l'époque de la splendeur de la dynastie abbasside. Comme les califes Al Mamoum et Al Moutasim encouragent les sciences et les arts, Al Khwarizmi peut se consacrer entièrement à sa passion pour les mathématiques.

Dans son traité, *Kitab al jabr w'al muqabalah*, il traite de façon systématique les équations du second degré. En utilisant l'*al jabr*, littéralement la remise en place, il transforme une soustraction dans un membre en une addition dans l'autre membre, tandis qu'*al muqabalah*, littéralement le balancement, revient à supprimer dans les deux membres l'addition d'un même terme. Il ramène ainsi toutes les équations du second degré à six équations qu'il sait résoudre. Les méthodes sont purement algébriques, mais, influencé par les mathématiciens grecs, il les complète toujours par un procédé géométrique de résolution.

C'est le terme *al jabr*, qui, traduit en latin par *algebra*, a donné notre mot algèbre.

Voici une illustration géométrique de l'identité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:



Comment démontrer les deux autres identités remarquables en utilisant un support géométrique ?

1 Égalités

Définition. On appelle **identité** une égalité entre deux expressions qui est vraie quelles que soient les valeurs des différentes variables employées.

Exemple. 1. Identités remarquables : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \boldsymbol{(a+b)^2} & = & \boldsymbol{a^2+2ab+b^2} \\ \boldsymbol{(a-b)^2} & = & \boldsymbol{a^2-2ab+b^2} \\ \boldsymbol{(a+b)(a-b)} & = & \boldsymbol{a^2-b^2} \end{array}}$$

2. En trigonométrie, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\boldsymbol{\sin(x)^2+\cos(x)^2=1}\,.}$$

2 Inégalités

2.1 Notations

Définition. Une **inégalité** est un énoncé permettant de comparer l'ordre de deux objets.

▶ **Inégalités strictes**

La notation $a < b$ signifie que a est **strictement inférieur** à b.
La notation $a > b$ signifie que a est **strictement supérieur** à b.

▶ **Inégalités larges**

La notation $a \leqslant b$ signifie que a est **inférieur** (ou **inférieur ou égal**) à b. La notation $a \geqslant b$ signifie que a est **supérieur** (ou **supérieur ou égal**) à b.

2.2 Propriétés

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$,

▶ **Transitivité :**

$$\boxed{(a < b \text{ et } b < c) \Longrightarrow a < c}$$

▶ **Addition :**

$$\boxed{a < b \Longrightarrow a+c < b+c}$$

▶ **Passage à l'opposé :**

$$\boxed{a < b \Longrightarrow -a > -b}$$

▶ **Multiplication et division :**

Si $\boldsymbol{c > 0}$, alors :

$$a < b \quad \Longrightarrow \quad ac < bc \quad \text{et} \quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c}.$$

Si $\boldsymbol{c < 0}$, alors

$$a < b \quad \Longrightarrow \quad ac > bc \quad \text{et} \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c}.$$

▶ **Passage à l'inverse :**

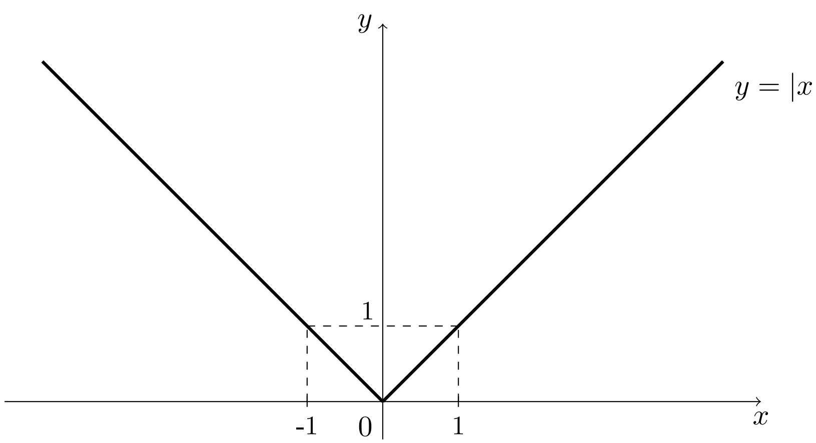
$$0 < a < b \implies \frac{1}{a} > \frac{1}{b}. \quad \text{(inversion de l'ordre)}$$

$$a < b < 0 \implies \frac{1}{a} > \frac{1}{b}. \quad \text{(inversion de l'ordre)}$$

2.3 Valeur absolue

Définition. La valeur absolue d'un nombre réel est sa valeur numérique sans tenir compte de son signe.
Pour tout nombre réel x, la **valeur absolue** de x, notée $|x|$, est définie par :

$$\begin{cases} |x| = x, & \text{si } x \geqslant 0 \\ |x| = -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}.$$



Proposition. Pour tous réels a et b :

$$|a| \geqslant 0 \qquad |a| = 0 \Longleftrightarrow a = 0$$

$$|ab| = |a| \times |b| \qquad \text{Si } b \neq 0, \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$\boldsymbol{|a| = \sqrt{a^2}}$$

Proposition. Les inégalités triangulaires :

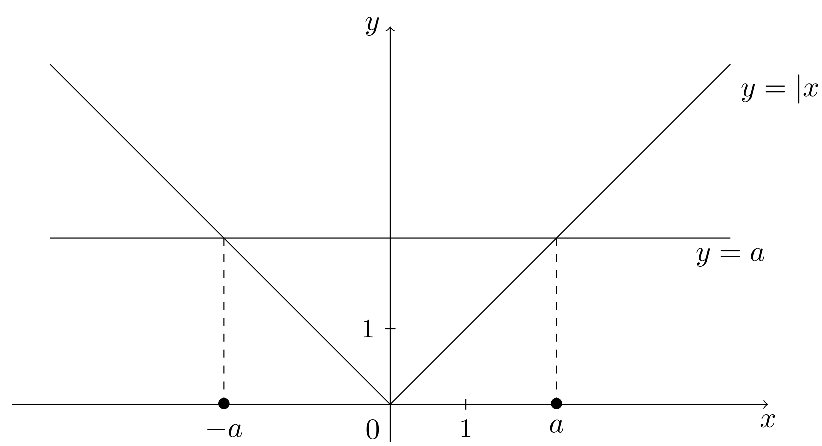
$$\boldsymbol{|a+b| \leqslant |a| + |b|} \qquad \boldsymbol{\big||a| - |b|\big| \leqslant |a-b|}$$

Comment traduire des égalités et inégalités simples faisant intervenir des valeurs absolues ?

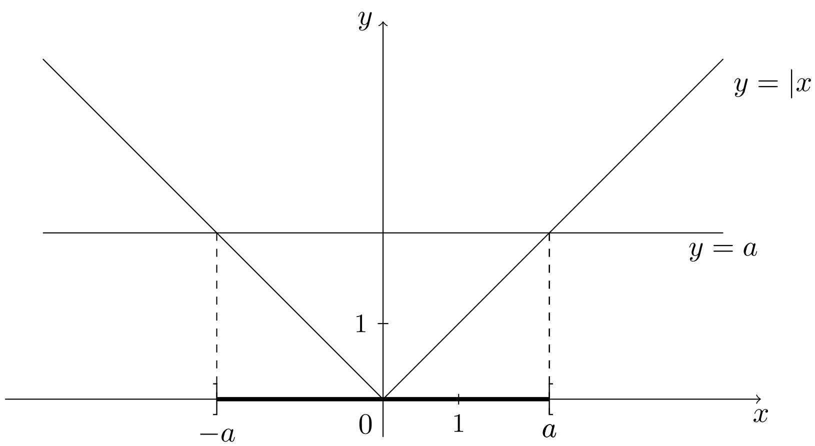
Soient x un réel et a un réel tel que $a > 0$.

$$\begin{array}{lcc} |x| = a & \Longleftrightarrow & x = -a \text{ ou } x = a \\ |x| < a & \Longleftrightarrow & -a < x < a \\ |x| \leqslant a & \Longleftrightarrow & -a \leqslant x \leqslant a \\ |x| > a & \Longleftrightarrow & x < -a \text{ ou } x > a \\ |x| \geqslant a & \Longleftrightarrow & x \leqslant -a \text{ ou } x \geqslant a \end{array}$$

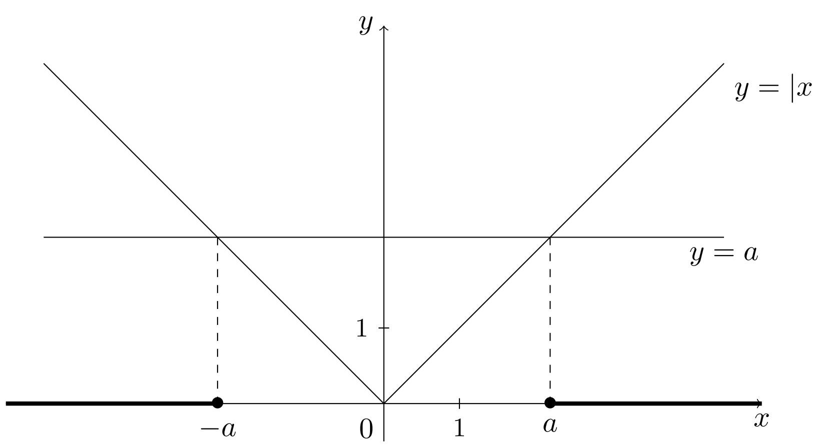
▶ $|x| = a \iff x = -a$ **ou** $x = a$



► $|x| < a \iff -a < x < a$



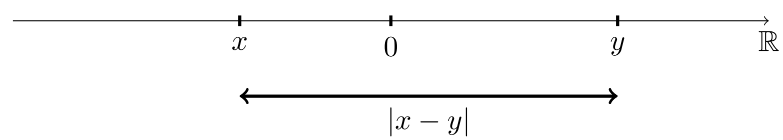
► $|x| \geqslant a \iff x \leqslant -a$ **ou** $x \geqslant a$



Remarque. Que se passe-t-il lorsque $a = 0$ ou $a < 0$?

La valeur absolue comme une distance

La quantité $|x - y|$ mesure la distance entre deux points x et y de la droite réelle.



2.4 Intervalles

Définition. **(Intervalles de $\mathbb{R}$)** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x \leqslant b\}$$
$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leqslant b\}$$
$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x < b\}$$
$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$$
$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x\}$$
$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x\}$$
$$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R},\ x \leqslant b\}$$
$$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R},\ x < b\}$$
$$]-\infty, +\infty[$$

3 Résolution d'équations et d'inéquations

Une **équation** est une égalité contenant une ou plusieurs variables, appelées **inconnues**. Résoudre une équation (ou une inéquation) d'inconnue x consiste à déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$, appelé **ensemble des solutions**, des x vérifiant l'équation (ou l'inéquation). Autrement dit, on cherche à montrer l'équivalence :

« x vérifie l'équation (ou l'inéquation) » $\iff$ « $x \in \mathscr{S}$ »

Exemple. On considère l'équation $x^2 - 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

....

....

....

3.1 Expressions polynomiales

a) Degré 1 : $ax + b$

Toute équation du premier degré peut se mettre sous la forme

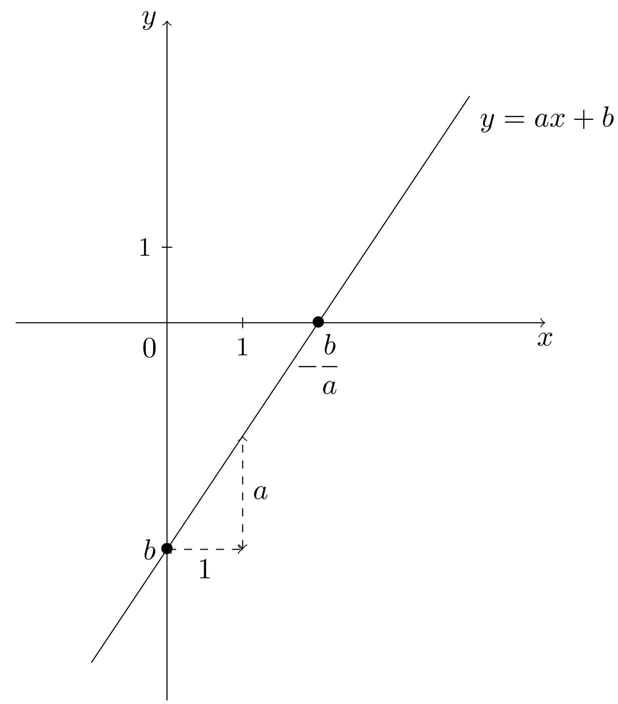
$$ax + b = 0.$$

1. Si $a \neq 0$, l'équation admet une unique solution : $\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$;
2. Si $a = 0$ et $b \neq 0$, l'équation n'admet aucune solution : $\mathscr{S} = \emptyset$;
3. Si $a = 0$ et $b = 0$, l'équation admet une infinité de solutions : $\mathscr{S} = \mathbb{R}$.

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les trois équations suivantes :

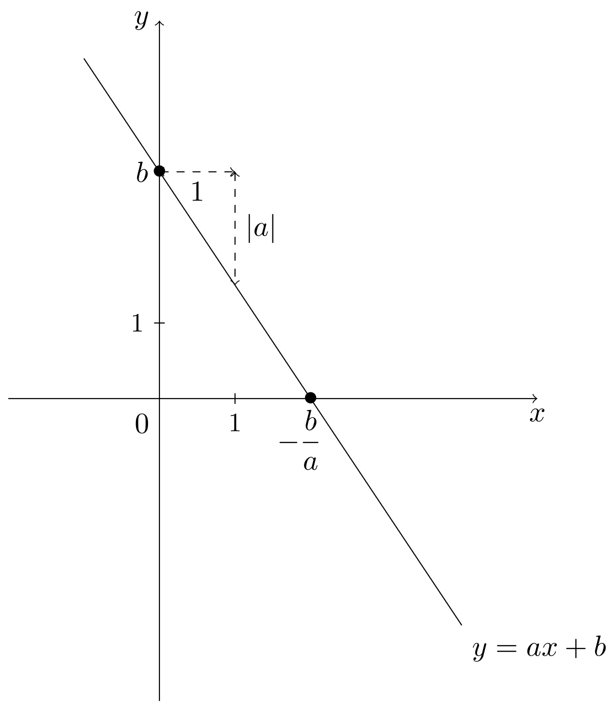
1. $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{1-2x}{5}$
2. $2(x+4) + 1 - 5x = 3(1-x) + 7$
3. $3(2x+4) - 2x = 14 - 2(1-2x)$

▶ **Si** $a > 0$ **:**



x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

▶ **Si** $a < 0$ **:**



x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

b) Degré 2 : $ax^2 + bx + c$

On appelle trinôme du second degré la quantité :

$$P(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{avec } a \neq 0.$$

On appelle discriminant du trinôme le réel $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$.

• Racines du trinôme

Définition. Les racines du trinôme $P(x)$ sont les solutions de l'équation $P(x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Théorème. Le nombre de racines du trinôme du second degré du signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, $P(x)$ admet deux racines distinctes (appelées racines simples) :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$, $P(x)$ admet une unique racine (appelée racine double) :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

- Si $\Delta < 0$, $P(x)$ n'admet aucune racine réelle.

Exercice 2. Déterminer les racines des trinômes suivants :

1. $P(x) = 2x^2 - x - 3$;
2. $Q(x) = x^2 - 6x + 9$;
3. $R(x) = -x^2 + 4x - 5$.

• Factorisation du trinôme

Théorème. Lorsque le trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$:

- admet deux racines simples x_1 et x_2, alors :

$$P(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,.$$

- admet une racine double x_0, alors : $P(x) = a\,(x - x_0)^2\,.$
- n'admet pas de racine réelle et on ne peut pas factoriser $P(x)$.

Exercice 3. Factoriser les trinômes $P(x)$, $Q(x)$ et $R(x)$ définis dans l'exercice précédent.

• Signe du trinôme et inéquation du second degré

▶ Si $\boxed{\Delta > 0}$ alors le trinôme $P(x)$ admet deux racines x_1 et x_2.

On suppose $x_1 < x_2$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

▶ Si $\boxed{\Delta = 0}$ alors le trinôme $P(x)$ admet une unique racine x_0.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de a	

▶ Si $\boxed{\Delta < 0}$ alors le trinôme $P(x)$ n'admet aucune racine réelle.

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $-2x^2 - 5x + 3 < 0$
2. $-2x^2 + 5x - 4 \leqslant 0$
3. $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 > 0$

• Représentation de la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$

- Si $\Delta > 0$, la parabole coupe deux fois l'axe des abscisses.
- Si $\Delta = 0$, la parabole est tangente à l'axe des abscisses.
- Si $\Delta < 0$, la parabole ne coupe pas l'axe des abscisses.

	$a > 0$	$a < 0$

• Équation paramétrique

On appelle « équation paramétrique de paramètre m » une équation d'inconnue x dont les coefficients a, b, c dépendent de m. Par exemple,

$$(m-1)x^2 - 4mx + 4m - 1 = 0 \qquad (E_m)$$

est une équation paramétrique de paramètre m.

Exercice 5. Déterminer le nombre de solutions de l'équation paramétrique (E_m) en fonction de la valeur de m, puis visualiser les résultats obtenus.

• Équation bicarrée

Définition. On appelle équation bicarrée, une équation de la forme :

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \text{ avec } a \neq 0$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$.

• **Somme et produit de racines**

Théorème. Si un trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ admet deux racines x_1 et x_2, alors la somme S et le produit P de ses racines sont égales à :

$$S = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad P = \frac{c}{a}.$$

Remarque. La réciproque est vraie.

c) Degré supérieur ou égal à 3

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

3.2 Équations et inéquations rationnelles

Exercice 8. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\dfrac{4}{x+1} \leqslant 3$.

3.3 Équations et inéquations avec valeurs absolues

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|2x+1| < |x+2|$.

3.4 Équations et inéquations avec radicaux

Exercice 10. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{x^2 - 2x} = x - 3$.