Chapitre 3 : Fonctions usuelles

1 Fonctions logarithmes

Définition. On appelle **logarithme népérien** et on note ln la primitive nulle en 1 de la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+\star} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}.$$

Proposition. Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^{+\star})^2$ et tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \qquad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \qquad \ln(x^n) = n\ln(x)$$

Proposition.

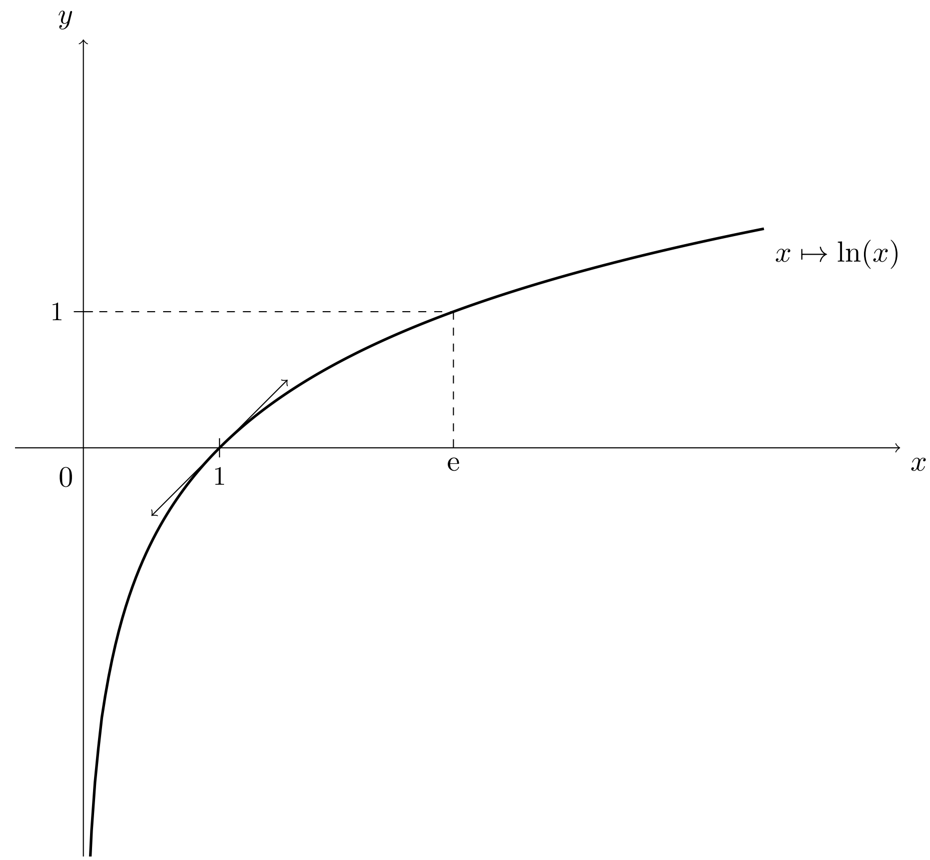
1. La fonction ln est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$,

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

2. $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.

Proposition. L'équation $\ln(x) = 1$ admet une unique solution notée e :

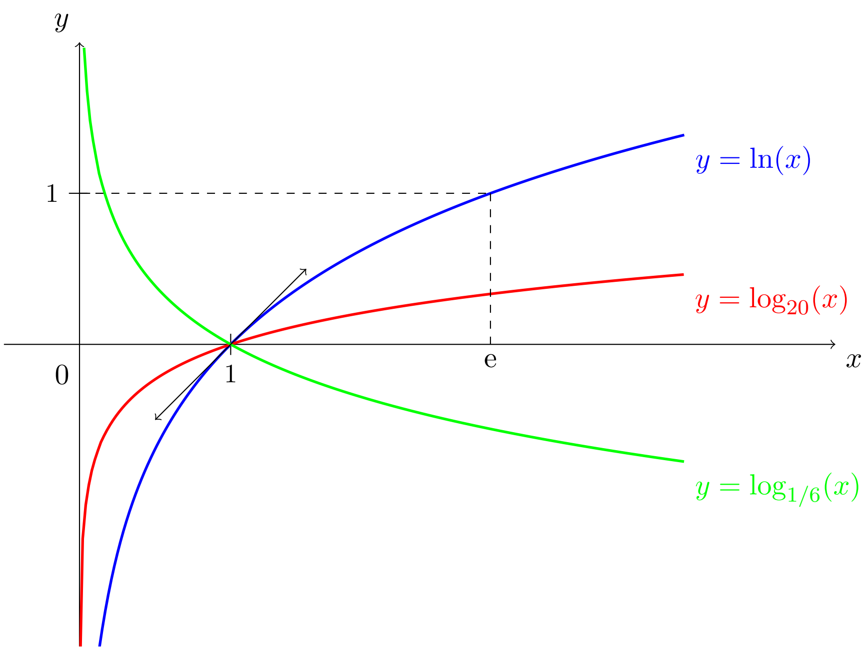
$$\ln(\mathrm{e}) = 1.$$



Définition. Pour tout $a \in \mathbb{R}^{+\star} \setminus \{1\}$, on appelle **fonction logarithme en base** a, la fonction

$$\begin{array}{rccl} \log_a & : & \mathbb{R}^{+\star} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{array}.$$

Pour $a = 10$, cette fonction est aussi notée Log.



2 Fonctions exponentielles

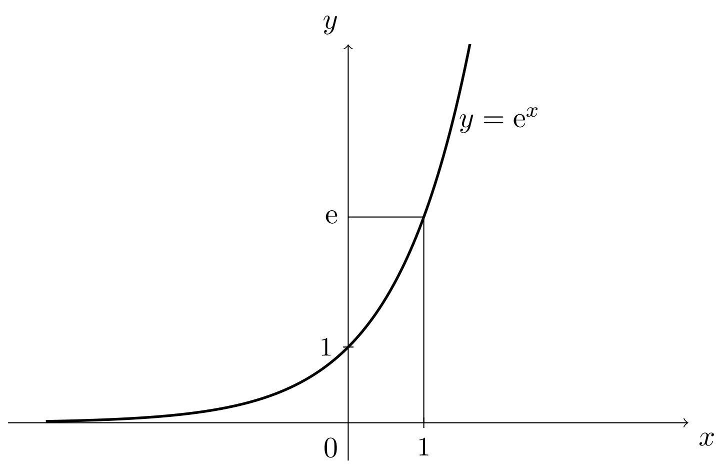
Définition. On appelle **fonction exponentielle** la réciproque de la fonction ln, et on la note exp. L'image d'un réel x par cette fonction est notée e^x ou $\exp(x)$.

$$\begin{array}{ll} \forall x \in \mathbb{R}, & \ln(\exp(x)) = x \\ \forall x \in \mathbb{R}^{+\star}, & \exp(\ln(x)) = x \end{array}$$

Proposition. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \qquad \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \qquad \exp(nx) = (\exp(x))^n$$



Proposition.

1. La fonction exp est dérivable et

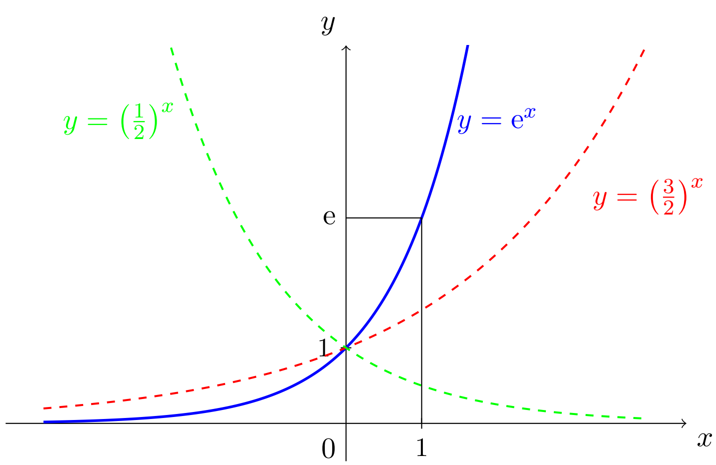
$$\text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}, \quad \exp'(x) = \exp(x).$$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

Définition. Soit $a \in \mathbb{R}^{+\star}$. On appelle **fonction exponentielle en base** a la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^{+\star} \\ x & \mapsto & a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)}. \end{array}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \ln(a)a^x$.



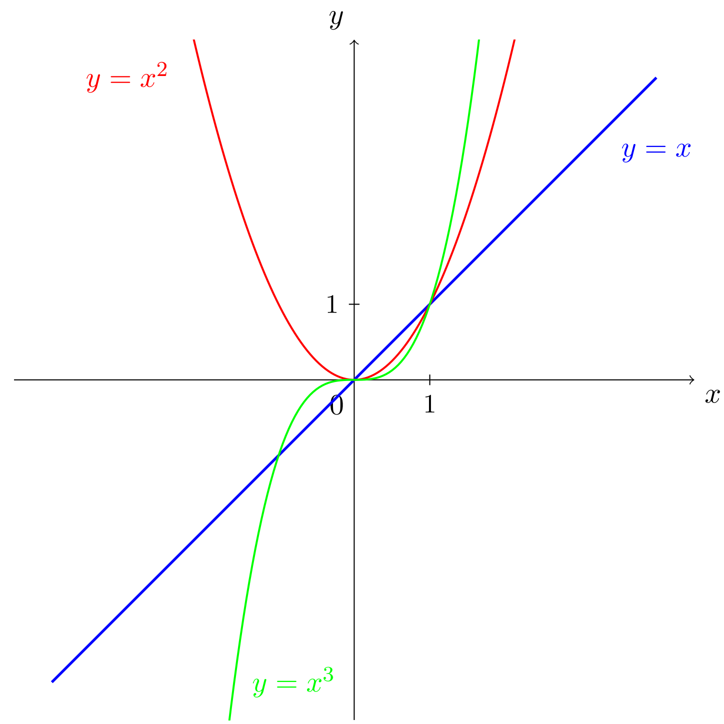
3 Fonctions puissances

3.1 Exposant entier naturel n

Ce sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{f_n(x) = x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}},}$$

où n est un entier naturel.



Proposition. Pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ et tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n \quad ; \quad x^{n+m} = x^n \cdot x^m \quad \text{et} \quad (x^n)^m = x^{n \cdot m}\ .$$

Proposition. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est dérivable et

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f_n'(x) = nx^{n-1}.$$

Remarque. • Lorsque n est pair, la fonction $x \mapsto x^n$ est une **fonction paire**. Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

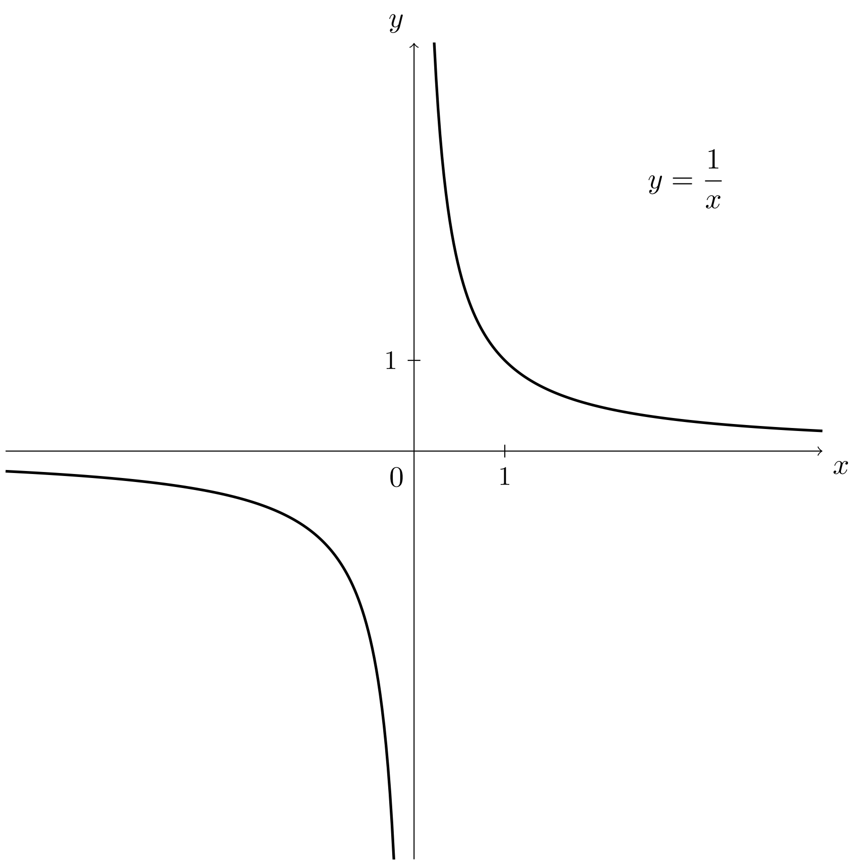
• Lorsque n est impair, la fonction $x \mapsto x^n$ est une **fonction impaire**. Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.

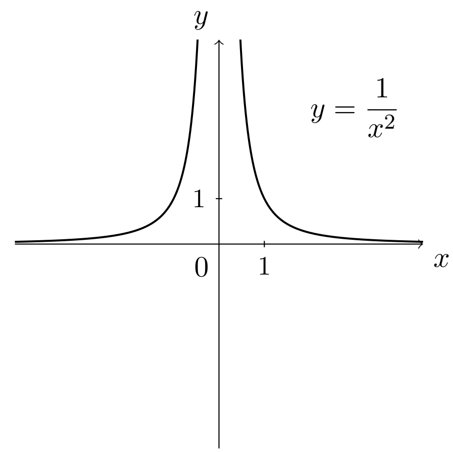
3.2 Exposant entier négatif $-n$

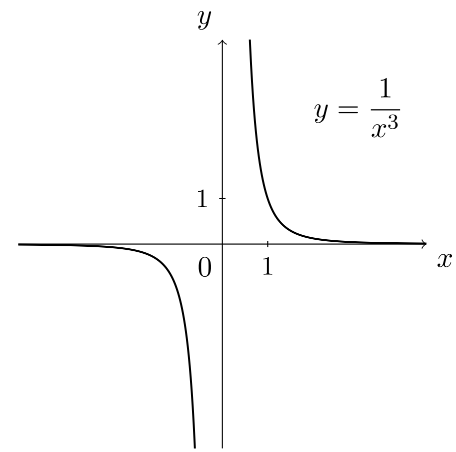
Ce sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}^\star$ par :

$$\boxed{f_{-n}(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \frac{1}{f_n(x)},}$$

où n est un entier naturel.







Proposition. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\star$, on a

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \ .$$

Proposition. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. La fonction f_{-n} est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$

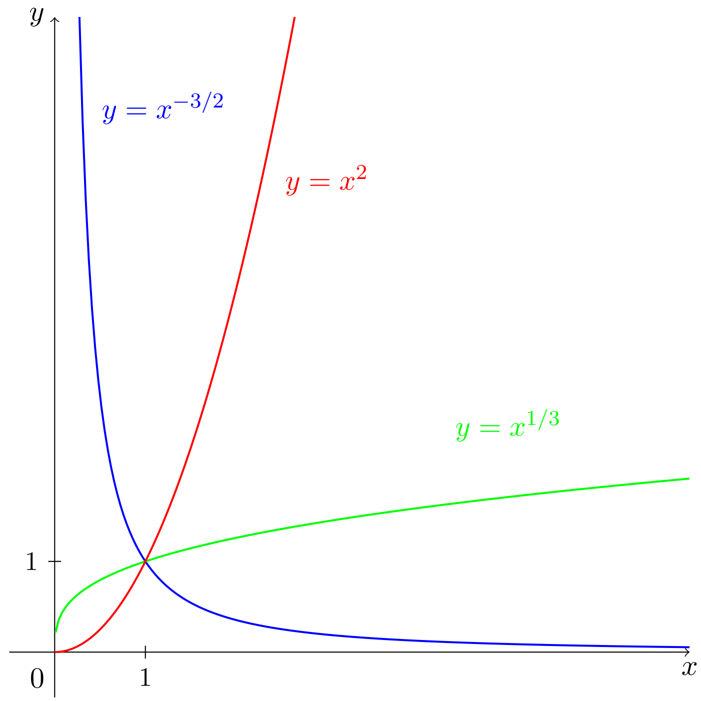
$$f_n'(x) = -nx^{-(n+1)} = -n\frac{1}{x^{n+1}} \ .$$

3.3 Exposant réel a

Ce sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+\star}$ par

$$\boxed{f_a(x) = \mathrm{e}^{a \ln x}.}$$

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$, on note x^a le réel $\mathrm{e}^{a \ln x}$.



Ainsi, par définition même, on a

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Pour tout } x \in \mathbb{R}^{+\star} \text{ et tout } a \in \mathbb{R}, & \ln(x^a) = a \ln(x), \\ \text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et tout } a \in \mathbb{R}, & (\mathrm{e}^x)^a = \mathrm{e}^{a \cdot x}. \end{array}}$$

Proposition. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}$ et tout $(x,y) \in \left(\mathbb{R}^{+\star}\right)^2$, on a

$$(x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a \quad ; \quad x^{a+b} = x^a \cdot x^b \quad \text{et} \quad \left(x^a\right)^b = x^{a \cdot b} \ .$$

Proposition. Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction f_a est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$

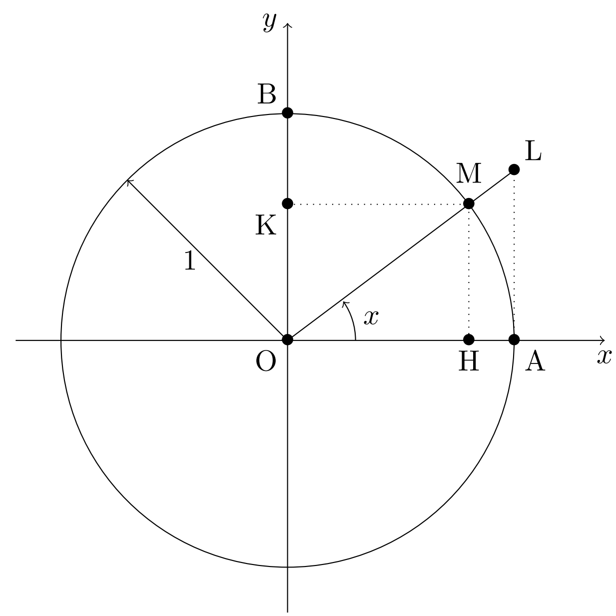
$$f_a'(x) = a x^{a-1}.$$

4 Fonctions trigonométriques

4.1 Présentation

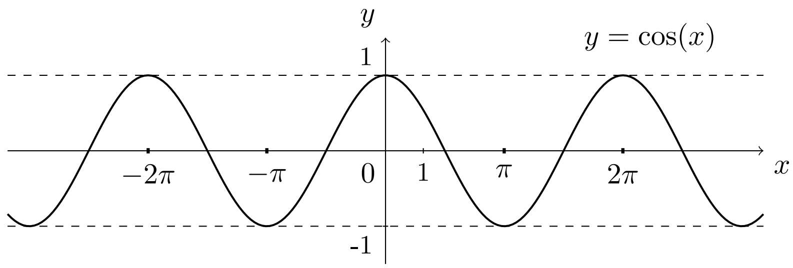
Soit M un point du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1. On construit les points H et K projections orthogonales respectives de M sur les droites (OA) et (OB), et le point L intersection, si elle existe, de la droite (OM) et de la perpendiculaire à (OA) passant par A. Si x désigne une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}})$, on sait que

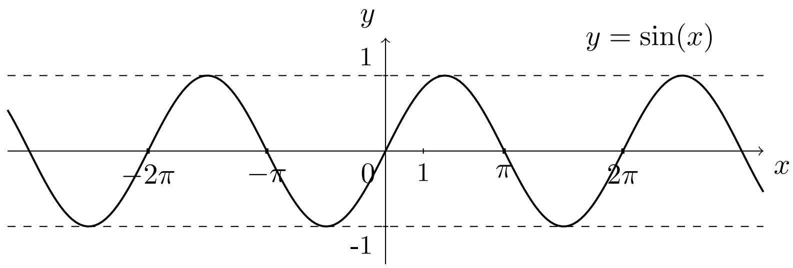
$$\cos(x) = \overline{OH} \quad \sin(x) = \overline{OK} \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \overline{AL}$$

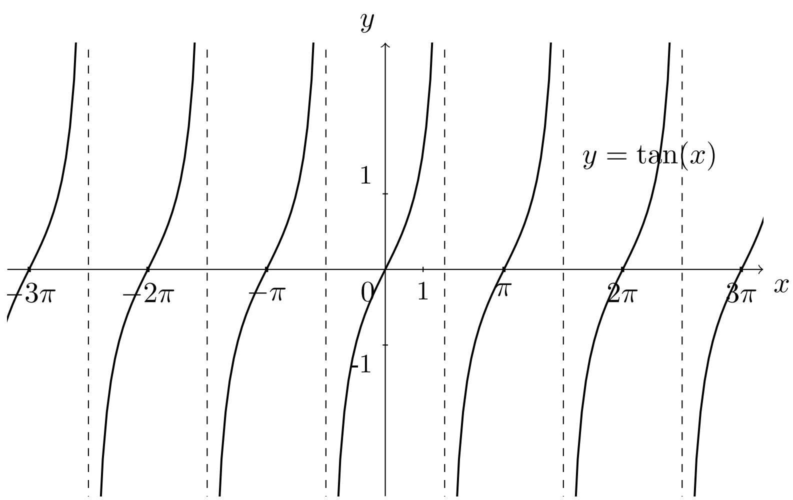


Remarque. $\tan(x)$ existe si et seulement si L existe, c'est-à-dire si et seulement si $M \notin (OB)$.

4.2 Représentations graphiques







4.3 Angles remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	0

4.4 Dérivées

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\cos'(x) = -\sin(x) \quad \text{et} \quad \sin'(x) = \cos(x)\ .}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$,

$$\boxed{\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)\ .}$$

4.5 Propriétés élémentaires

Que l'on retrouve en dessinant simplement un cercle trigonométrique.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{ll}
\cos(-x) = \cos(x) & \sin(-x) = -\sin(x) \\
\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \\
\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x) & \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x) \\
\cos\left(\pi - x\right) = -\cos(x) & \sin\left(\pi - x\right) = \sin(x) \\
\cos\left(\pi + x\right) = -\cos(x) & \sin\left(\pi + x\right) = -\sin(x)
\end{array}$$

4.6 Formulaire

Dans le formulaire qui suit, a et b sont deux réels. On ne s'intéresse pas aux domaines de définition des fonctions : les formules ne sont donc valables que lorsqu'elles ont un sens.

$$\boxed{\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1}$$

Formules d'addition

$$\boxed{\begin{array}{l}
\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \\
\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a) \\
\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\
\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\
\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} \\
\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}
\end{array}}$$

Formules de duplication

$$\boxed{\begin{array}{l}
\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) \\
\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) \\
\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}
\end{array}}$$

Formules de factorisation

$$\boxed{\begin{array}{lcl}
\cos(p) + \cos(q) & = & 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\
\cos(p) - \cos(q) & = & -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\
\sin(p) + \sin(q) & = & 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\
\sin(p) - \sin(q) & = & 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)
\end{array}}$$