Chapitre 4 : Pratique calculatoire et fonctions

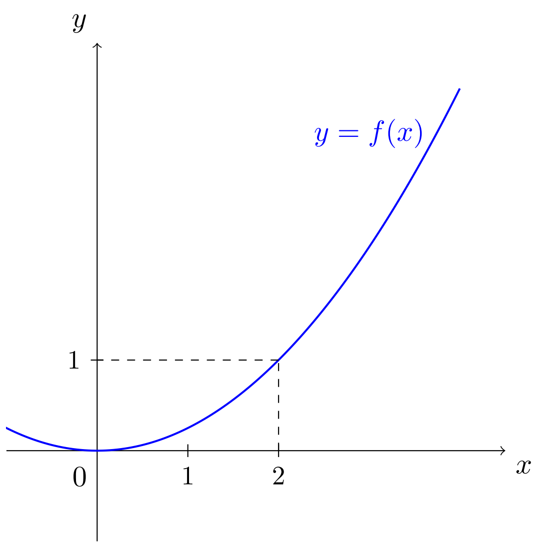
1 Calcul de limites

1.1 Définitions

a. Limite d'une fonction en un point

Définition. (Limite finie en un point) Dire qu'une fonction f a pour limite ℓ en a signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a. On note alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell.$$



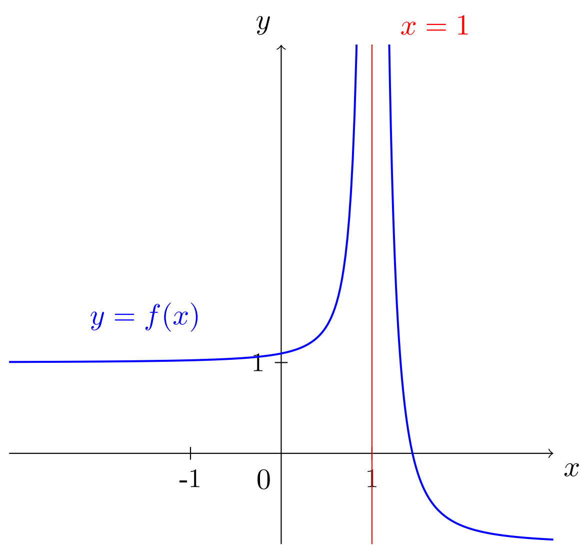
Ici ....

Définition. (Limite infinie en un point) Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a signifie que tout intervalle $]M; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a. On note alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty.$$

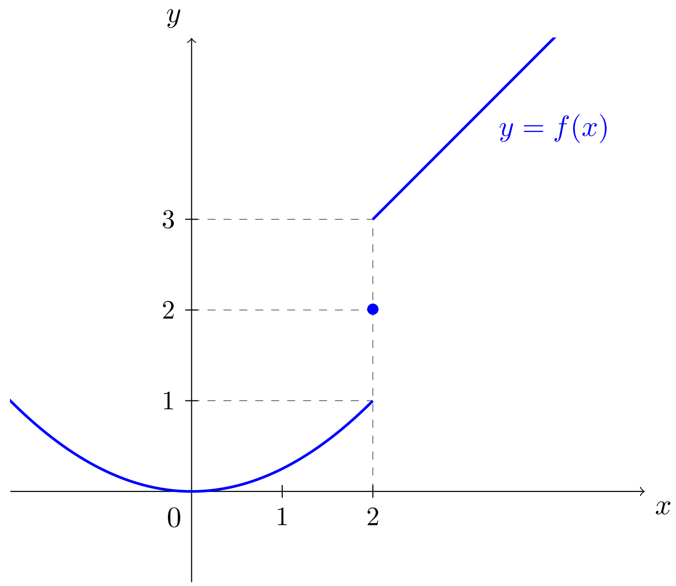
La droite d'équation $x = a$ est appelée **asymptote verticale** à $\mathscr{C}_f$.

Remarque. On définit de manière similaire $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.



Ici ....

- Limites à gauche, à droite : $\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$



Ici ....

....

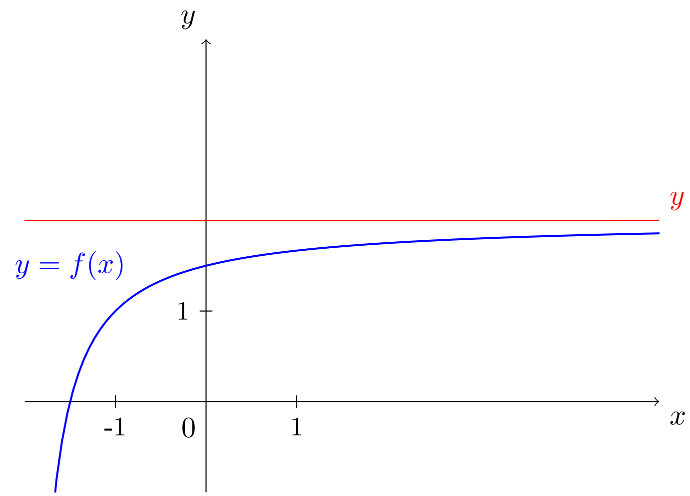
....

b. Limite d'une fonction à l'infini

Définition. (Limite finie à l'infini) Dire qu'une fonction f a pour limite ℓ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. On note alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell.$$

La droite d'équation $y = \ell$ est appelée **asymptote horizontale** à $\mathscr{C}_f$.

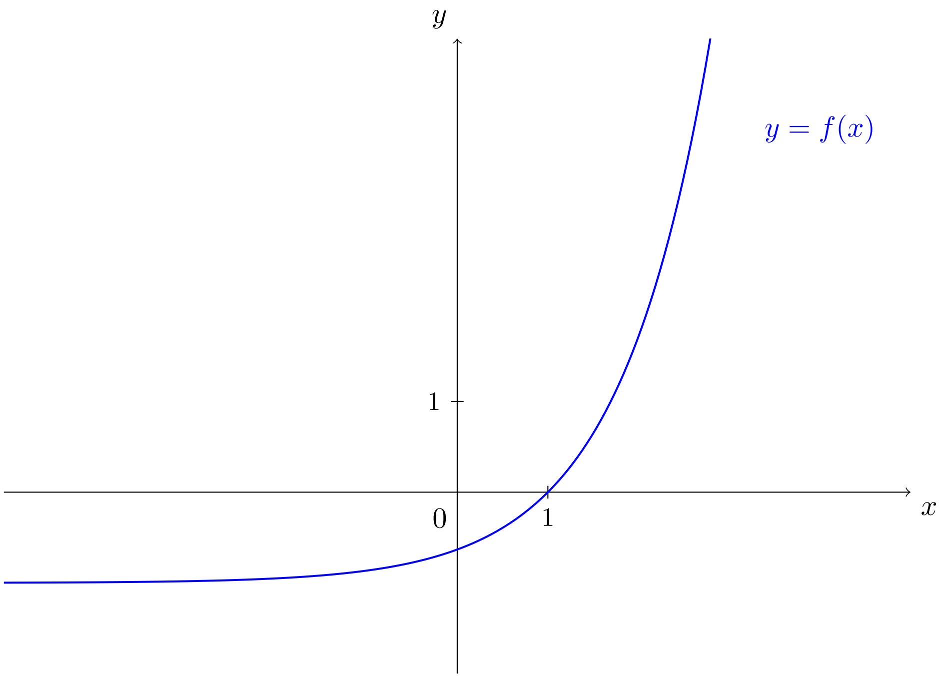


Ici ....

Remarque. On définit de manière similaire $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$.

Définition. (Limite infinie à l'infini) Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle $]M, +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. On note alors :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$



Ici ....

Remarque. On définit de manière similaire

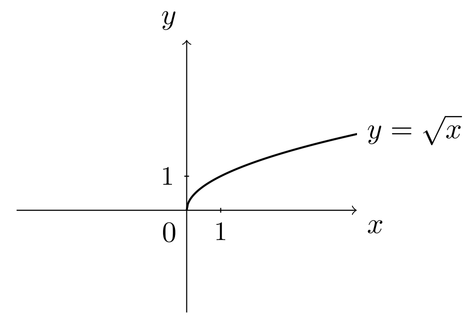
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty\ , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

1.2 Limites usuelles

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \\ +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

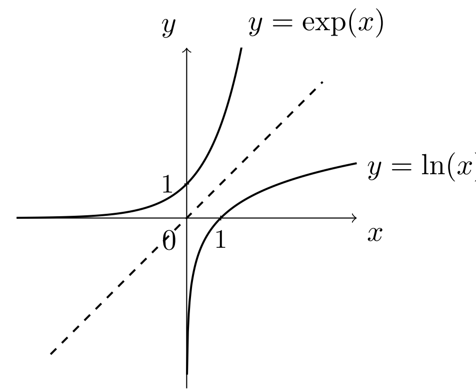


$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

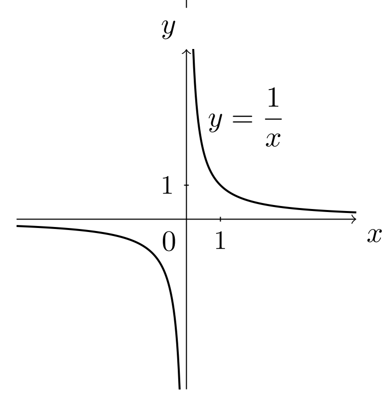


$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$



1.3 Opérations sur les limites

a. Limite d'une somme

Le tableau suivant indique la limite de la fonction $f+g$ en a, $\lim\limits_{x\to a} f(x)+g(x)$, lorsqu'elle existe :

$\lim\limits_{x\to a} g(x)$ \ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\ell\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell'\in\mathbb{R}$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**F.I.**
$-\infty$	$-\infty$	**F.I.**	$-\infty$

Exercice 1. Déterminer, si possible, les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}+\dfrac{1}{x} =$ ....

$\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x+x=$ ....

$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x+x =$ ....

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+x^3 =$ ....

b. Limite d'un produit

Le tableau suivant indique la limite de la fonction $f\times g$ en a, $\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x)$, lorsqu'elle existe :

$\lim\limits_{x\to a} g(x)$ \ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\ell>0$	$\ell<0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell'>0$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell'<0$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	**F.I.**	**F.I.**
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**F.I.**	$-\infty$	$+\infty$

Exercice 2. Déterminer, si possible, les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+x =$ ....

$\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x} =$ ....

$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x^2}\sin(x) =$ ....

c. Limite d'un quotient

On suppose que $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$. Alors la fonction $\frac{f}{g}$ est définie au voisinage de a. Le tableau suivant indique la limite de la fonction $\frac{f}{g}$, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, lorsqu'elle existe :

$\lim_{x\to a} f(x)$ / $\lim_{x\to a} g(x)$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' > 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' < 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0	0	0	**F.I.**	**F.I.**
$-\infty$	0	0	0	**F.I.**	**F.I.**

Exercice 3. Déterminer, si possible, les limites suivantes :

$\lim_{x\to -1} \frac{2x-1}{(x+1)^2} =$ ....

....

....

$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x+1}{5x-3} =$ ....

....

....

d. Limite d'une fonction composée

Définition. (Fonction composée) Soient I, J et K trois intervalles de $\mathbb{R}$. Soient $f : I \to J$ et $g : J \to K$ deux fonctions réelles. On définit la composée de f par g, notée $g \circ f$, par

$$\forall x \in I, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

On obtient une nouvelle fonction $g \circ f : I \to K$.

Exercice 4. Déterminer l'expression des fonctions composées suivantes :

1. Si $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$ et $g(x) = \mathrm{e}^x$, alors

   $f \circ g(x) =$ ....

   $g \circ f(x) =$ ....

2. Si $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$, alors

   $f \circ g(x) =$ ....

   $g \circ f(x) =$ ....

3. Si $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = 2x - 3$, alors

   $f \circ g(x) =$ ....

   $g \circ f(x) =$ ....

Théorème. (Limite d'une fonction composée) Soient $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$.
Si

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{x \to b} g(x) = c.$$

Alors

$$\lim_{x \to a} g \circ f(x) = c.$$

Exercice 5. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x \to +\infty} \cos\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{e^x + x^2}.$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

1.4 Théorèmes de comparaison

Théorème. (Passage à la limite dans une inégalité) Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f, g deux fonctions qui admettent des limites finies en a.
Si

$$f(x) \leqslant g(x) \text{ au voisinage de } a,$$

alors

$$\lim_{x \to a} f(x) \leqslant \lim_{x \to a} g(x).$$

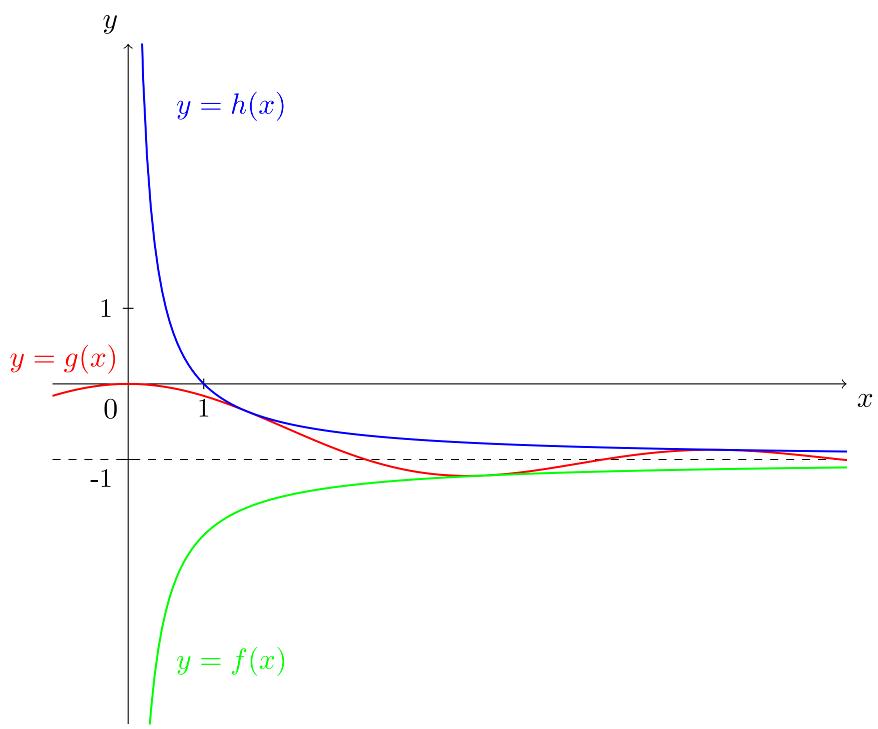
Remarque. Les inégalités strictes ne passent pas à la limite !
Si

$$f(x) \boxed{<} g(x) \text{ au voisinage de } a,$$

alors

$$\lim_{x \to a} f(x) \boxed{\leqslant} \lim_{x \to a} g(x).$$

Théorème. (Théorème d'encadrement) Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.
Si
$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \text{ au voisinage de } a$$
et
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \ell,$$
alors
$$\lim_{x\to a} g(x) = \ell.$$



Ici ....

....

....

Exercice 6. Déterminer la limite de $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ en $+\infty$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

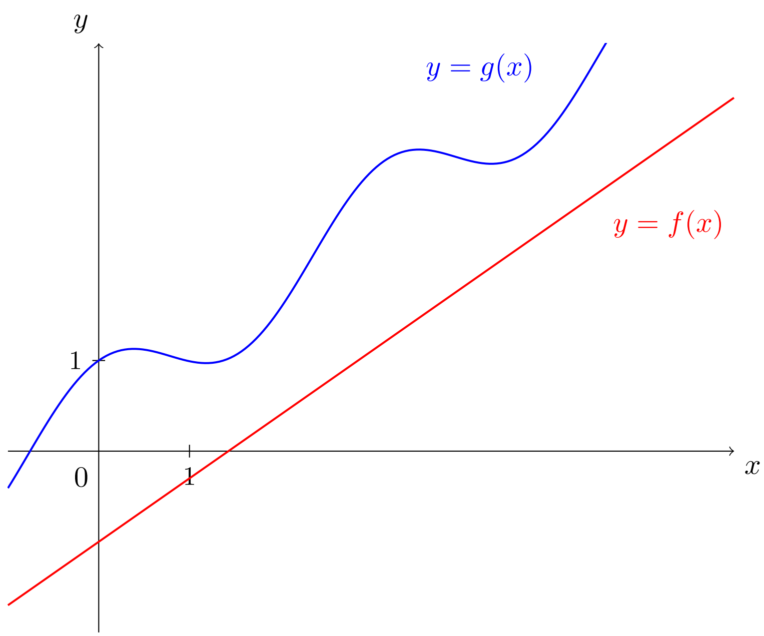
....

....

Théorème. (Théorème de comparaison) Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

On suppose que $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de a.

- Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.



Ici ....

....

....

Exercice 7. Déterminer la limite de $f(x) = x + \cos(x)$ en $+\infty$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

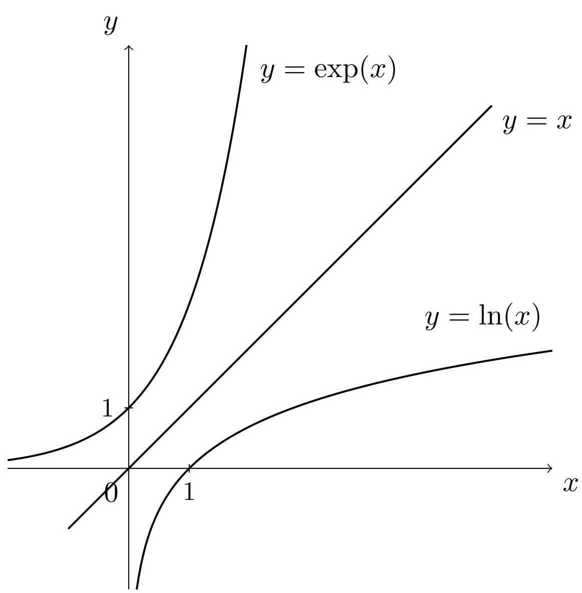
1.5 Croissances comparées

Au voisinage de l'infini, ≪ *les exponentielles l'emportent sur les puissances, qui l'emportent sur les logarithmes* ≫.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^x} = 0$$

Remarque. Ce théorème est encore vrai si l'on remplace n par α un réel strictement positif.



1.6 Quelques limites à connaître

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Exercice 8. Déterminer, si possible,

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x - \ln(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x - x.$$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2 Calcul de dérivées

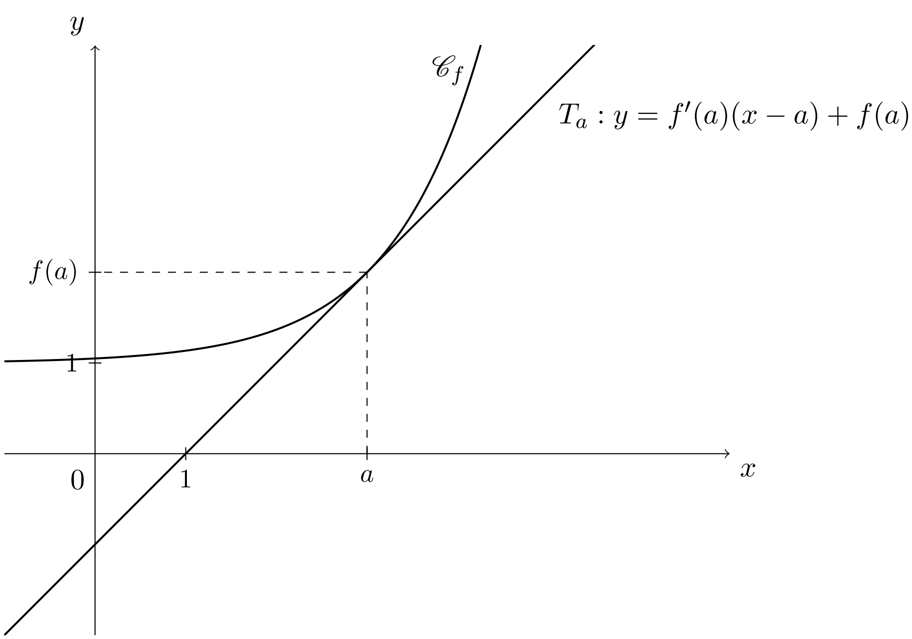
2.1 Taux d'accroissement. Nombre dérivé. Tangente.

Définition. f **est dérivable en** a si et seulement si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie lorsque x tend vers a, Dans ce cas, le **nombre dérivé de** f **en** a est

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ **au point d'abscisse** a :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$



2.2 Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Dérivée
$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}^\star$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N}^\star$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{Z}^\star$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$f'(x) = \mathrm{e}^x$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos(x)^2}$

2.3 Dérivées et opérations

- Si u et v sont deux fonctions dérivables sur I, $u+v$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$

$$\boxed{[\,u(x)+v(x)\,]' = u'(x)+v'(x).}$$

- Si u est dérivable sur I et si λ est un réel, λu est dérivable sur I et pour tout $x \in I$

$$\boxed{[\,\lambda \times u(x)\,]' = \lambda \times u'(x).}$$

- Si u et v sont deux fonctions dérivables sur I, $u \times v$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$

$$\boxed{[\,u(x) \times v(x)\,]' = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x).}$$

- Si u et v sont deux fonctions dérivables sur I et si v ne s'annule pas sur I, $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$

$$\boxed{\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v(x)^2}.}$$

- Si u est dérivable sur I et si f est dérivable sur $u(I)$, $f \circ u$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$

$$\boxed{[\,f\,(u(x))\,]' = u'(x) \times f'\,(u(x))\,.}$$

On déduit de cette dernière formule le tableau suivant :

Fonction	Dérivée
$u(x)^n, \quad n \in \mathbb{Z}^\star$	$nu'(x)u(x)^{n-1}$
$\sqrt{u(x)}$	$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$\mathrm{e}^{u(x)}$	$u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$
$\ln\,(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$
$\sin\,(u(x))$	$u'(x)\cos\,(u(x))$
$\cos\,(u(x))$	$-u'(x)\sin\,(u(x))$

Exercice 9. Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f(x) = (3x-5)^4 \quad ; \quad g(x) = \sqrt{x^2+x+1} \quad ; \quad h(x) = \sin(2x+1).$$

3 Calcul de primitives

3.1 Définition et résultats

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Une fonction F est une primitive de f sur I, si et seulement si, elle est dérivable sur I et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = f(x).$$

Théorème. Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Théorème. Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I. Toute primitive de f sur I est de la forme $x \mapsto F(x) + C$, où $C \in \mathbb{R}$.

Théorème. Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

3.2 Primitives des fonctions usuelles

Fonction	Primitives
$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln(\|x\|) + C$
$f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$F(x) = \sqrt{x} + C$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$F(x) = \mathrm{e}^x + C$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + C$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + C$

3.3 Primitives et opérations

- Si f et g sont continues sur I et si F et G sont des primitives sur I de f et g respectivement, $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.

- Si f est continue sur I, si F est une primitive de f sur I et si λ est un réel, λF est une primitive de λf sur I.

- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I dont la dérivée u' est continue sur I, alors :

Fonction	Primitives
$f(x) = u'(x)u(x)^n, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$F(x) = \dfrac{u(x)^{n+1}}{n+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$F(x) = \ln(\|u(x)\|) + C$
$f(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$F(x) = \sqrt{u(x)} + C$
$f(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$	$F(x) = \mathrm{e}^{u(x)} + C$
$f(x) = u'(x)\sin(u(x))$	$F(x) = -\cos(u(x)) + C$
$f(x) = u'(x)\cos(u(x))$	$F(x) = \sin(u(x)) + C$

Exercice 10. Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ ....

   ....

2. $f(x) = 2x(x^2 - 1)^3$ ....

   ....

. . . .

3. $f(x) = (3x-1)^4$ . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

4. $f(x) = \dfrac{2}{2x-3}$ . . . .

. . . .

. . . .

5. $f(x) = \dfrac{1}{4x+1}$ . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

6. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$ . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

7. $f(x) = \mathrm{e}^{4x+1}$ . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3.4 Primitives et intégrales

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

où F est une primitive de f.

Exercice 11. Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_{-1}^{2} (x^2 - 4x + 3)\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^2 \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x.$$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Théorème. (Intégration par parties)
Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a;b]$,

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Exercice 12. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer $I = \int_0^1 x\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.