Chapitre 5 : Calcul algébrique

Un chapitre, un mathématicien

Blaise Pascal (1623-1662)

Blaise Pascal perd sa mère à l'âge de trois ans. Étienne, son père, juriste passionné de mathématiques, lié avec les grands savants de l'époque, le prend alors en charge. Dès l'enfance, Blaise Pascal montre des dons exceptionnels pour les mathématiques. Âgé de 16 ans, il écrit un traité sur les coniques prometteur qui attire l'attention de Descartes. À 19 ans, il crée une machine à calculer capable d'automatiser les additions et les soustractions. Il la nomme dans un premier temps « machine arithmétique » avant de lui donner le nom de « pascaline ».

En 1648, il se passionne pour l'hydrostatique et, par sa célèbre expérience sur le puy de Dôme, établit la pesanteur de l'air.

En 1653, il étudie le triangle arithmétique qui porte aujourd'hui son nom. L'année suivante, il est mis en contact avec Fermat. Un fructueux échange épistolaire s'établit entre les deux hommes : il contient les prémices du calcul de probabilités.

Soumis à un éblouissement mystique, Pascal entre au couvent janséniste de Port-Royal en 1654. Il se détourne des sciences, qu'il considère comme incompatibles avec sa vocation nouvelle, et se consacre à la réflexion religieuse.

1 Sommes

Notation

Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leqslant n$, et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de nombres complexes.

L'expression $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} u_k$ se lit « somme pour k allant de m à n de u_k ».

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=2}^{6} k^2 =$ ....

....

k est appelé *indice de sommation*. Il s'agit d'une lettre muette :

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{\ell=m}^{n} u_\ell.$$

Quelques sommes à connaître :

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

$$⚠ \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$$

Plus généralement, $$\sum_{k=D}^{F} 1 = F - D + 1.$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Pour tout $q \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1. \end{cases}$$

Exemple. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2021} 1 =$ ....

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k^2 =$ ....

$\displaystyle\sum_{k=0}^{8} 2^k =$ ....

$\displaystyle\sum_{k=101}^{200} k =$ ....

....

....

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) \\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \end{aligned}$$

Simplification télescopique

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de nombres complexes.

$$\sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0.$$

En effet, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) =$ ....

....

....

Exercice 1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{24} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{24} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) =$ ....

....

....

....

....

Permutation de sommes

Pour toute famille $(u_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de nombres complexes :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} u_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} u_{ij},$$
$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} u_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} u_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} u_{ij},$$
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} u_{ij} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} u_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}.$$

Exercice 2. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 10} 1$.

$\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 10} 1 =$ ....

....

....

....

....

....

2 Produits

Notation

Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leqslant n$, et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de nombres complexes.

L'expression $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} u_k$ se lit « produit pour k allant de m à n de u_k ».

Ainsi $\displaystyle\prod_{k=1}^{6} 2^k =$ ....

....

....

Factorielle

Définition. (Factorielle) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
On appelle *factorielle* n et on note $n!$ l'entier :

$$\begin{aligned} n! &= n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 1\\ &= \prod_{k=1}^{n} k. \end{aligned}$$

Par convention, $0! = 1$.

Relation de récurrence : Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $n! = n\times(n-1)!$.

Exemple. $5! =$ ....

$\dfrac{12!}{10!} =$ ....

Simplification télescopique

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de nombre complexes non nuls.

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_0}.$$

Exercice 3. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{99} \frac{k+1}{k}$.

$\displaystyle\prod_{k=1}^{99} \frac{k+1}{k} =$ ....

....

....

Permutation de produits

Pour toute famille $(u_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de nombres complexes :

$$\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} u_{ij} = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} u_{ij} = \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{n} u_{ij},$$
$$\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} u_{ij} = \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{j} u_{ij} = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=i}^{n} u_{ij},$$
$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} u_{ij} = \prod_{j=2}^{n}\prod_{i=1}^{j-1} u_{ij} = \prod_{i=1}^{n-1}\prod_{j=i+1}^{n} u_{ij}.$$

3 Coefficients binomiaux

Définition. (Coefficient binomial « p parmi n »)
Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on appelle p *parmi* n et on note $\binom{n}{p}$ l'entier :

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } 0 \leqslant p \leqslant n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $0 \leqslant p \leqslant n$, alors

$$\begin{aligned} \binom{n}{p} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{p!} \end{aligned}$$

En particulier,

- si $n \geqslant 0$, $\binom{n}{0} = 1$
- si $n \geqslant 1$, $\binom{n}{1} = n$
- si $n \geqslant 2$, $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

Exemple. $\binom{5}{2} =$ ....

$\binom{15}{14} =$ ....

....

Théorème. • **Symétrie** : Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

- **Formule de factorisation** : Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^\star$,

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}.$$

- **Formule de Pascal** : Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}.$$

....

....

....

....

....

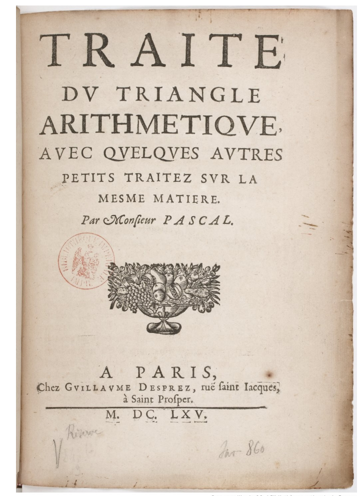
....

....

....

Triangle de Pascal : Le triangle de Pascal est une présentation des coefficients binomiaux $\binom{n}{p}$ dans un triangle. La construction de ce triangle est régie par la formule de Pascal.

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1



Théorème. (Formule du binôme de Newton)
Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{C}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$