Chapitre 6 : Les nombres complexes

Un chapitre, un mathématicien

Gerolamo Cardano
(Pavie 1501 – Rome 1576)

Le mathématicien, médecin, philosophe et astrologue Jérôme Cardan est le fils d'un jurisconsulte. Il étudie à l'université de Pavie puis à celle de Padoue, où il obtient son diplôme de médecin en 1526, et il s'installe à Milan où il vit humblement en donnant des cours de mathématiques. Admis en 1539 au Collège des médecins, il en devient le recteur et sa renommée dépasse bien vite l'Italie. Il se passionne pour les équations de degré 3 et 4. Les nombres complexes naîtront de confrontations avec des opérations impossibles comme les racines carrées de nombres négatifs. Il est l'un des premiers à en imaginer l'existence en 1545 dans son *Artis magnae sive regulis algebraicus* à l'occasion de la résolution de l'équation $x(10-x)=40$ dont il donne les solutions sous la forme suivante :

5. p. ℞. m. 15 et 5. m. ℞. m. 15

que l'on peut lire

$$5+\sqrt{-15} \quad \text{et} \quad 5-\sqrt{-15}$$

et fait observer que le produit de ces deux nombres donne bien 40 tout en reconnaissant que l'équation est, en toute théorie, impossible à résoudre. Il demande au lecteur de faire preuve d'imagination et appelle ces nombres des quantités sophistiquées.

1 Le corps des nombres complexes

Définition 1. Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ dont les éléments, appelés **nombres complexes**, s'écrivent de manière unique sous la forme $a+\mathbf{i}b$, avec a et b réels et $\mathbf{i}$ tel que

$$\mathbf{i}^2=-1.$$

Cet ensemble est muni de deux lois $+$ et $\times$ qui lui confèrent une structure de corps.

Les règles de calcul dans $\mathbb{C}$ sont données par :

$$\begin{aligned}(a+\mathbf{i}b)+(c+\mathbf{i}d) &= (a+c)+\mathbf{i}(b+d)\\ (a+\mathbf{i}b)\times(c+\mathbf{i}d) &= (ac-bd)+\mathbf{i}(ad+bc)\end{aligned}$$

Lorsque $z=a+\mathbf{i}b$ est non nul, c'est-à-dire lorsque les réels a et b ne sont pas tous les deux nuls, l'inverse de z est donnée par :

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+\mathbf{i}b} &= \frac{a-\mathbf{i}b}{(a+\mathbf{i}b)(a-\mathbf{i}b)}\\ &= \frac{a}{a^2+b^2}-\mathbf{i}\frac{b}{a^2+b^2}.\end{aligned}$$

Définition 2. Si z est un complexe, il existe un unique couple de réels (x,y) tel que $z=x+\mathbf{i}y$. Les réels x et y sont appelés respectivement **partie réelle** et **partie imaginaire** du complexe z et sont notés :

$$x=\mathrm{Re}(z) \quad \text{et} \quad y=\mathrm{Im}(z).$$

Un nombre complexe de la forme $\mathbf{i}y$ avec $y\in\mathbb{R}$ est appelé **imaginaire pur**.

Exercice 1. Donner la forme algébrique des complexes suivants :

1. $z_1 = (3+\sqrt{5}\mathbf{i})(3-\sqrt{5}\mathbf{i})$
2. $z_2 = (1+2\mathbf{i})^3$
3. $z_3 = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}\mathbf{i}}$
4. $z_4 = \dfrac{1+2\mathbf{i}}{1-2\mathbf{i}}$

Exercice 2. Résoudre l'équation $iz+1 = 2-z$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Théorème 1. *(Égalité de deux complexes) Soient z et z' deux nombres complexes.*

- $z = 0 \iff \mathrm{Re}(z) = 0$ *et* $\mathrm{Im}(z) = 0$
- $z = z' \iff \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z')$ *et* $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')$

Le plan complexe

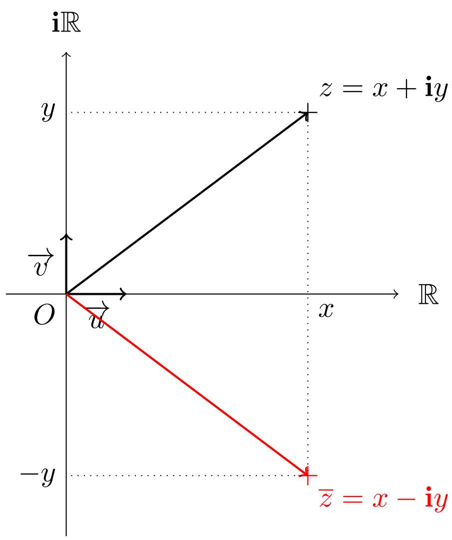
On appelle **plan complexe** un plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On peut représenter le nombre complexe $z = x + \mathbf{i}y$ par le point M de coordonnées (x, y).

Le point M est appelé **image** de z, et réciproquement z est appelé **affixe** de M.

Si A et B sont deux points d'affixes respectives z_A et z_B, on appelle aussi affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ le complexe $z_B - z_A$.

L'axe $(O, \overrightarrow{u})$ est appelé **axe des réels**.

L'axe $(O, \overrightarrow{v})$ est appelé **axe des imaginaires**.



Conjugué d'un nombre complexe

Définition 3. Soit $z = x + \mathbf{i}y$ un nombre complexe, x et y étant des réels. On appelle **conjugué** de z le nombre complexe, noté $\overline{z}$, défini par :

$$\overline{z} = x - \mathbf{i}y.$$

Exercice 3. Déterminer l'ensemble des complexes z vérifiant

$$z + 2\mathbf{i}\overline{z} = 1.$$

Proposition 1. *Soit* $(z, z') \in \mathbb{C}^2$,

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- *Si* $z' \neq 0$, *alors* $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

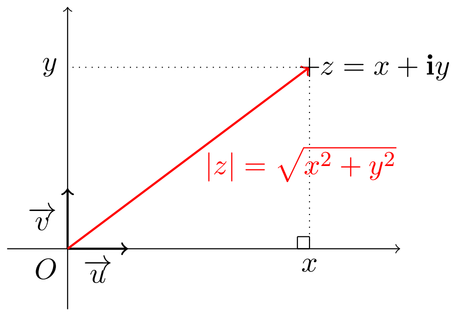
Proposition 2. *Soit* $z \in \mathbb{C}$,

- $\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$ *et* $\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2\mathbf{i}}$.
- $\overline{(\overline{z})} = z$.
- z *est réel* $\iff$ $z = \bar{z}$.
- z *est imaginaire pur* $\iff$ $z = -\bar{z}$.

2 Le module d'un nombre complexe

Définition 4. Soit $z = x + \mathbf{i}y \in \mathbb{C}$, $z\overline{z}$ est un réel positif. On appelle **module** de z le réel, noté $|z|$, défini par :

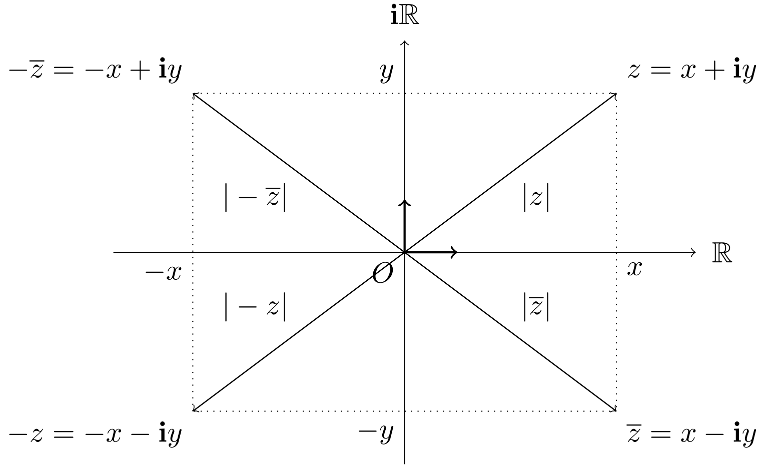
$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{z\overline{z}} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$



Proposition 3. *Soit* $z \in \mathbb{C}$,

$$|z| = 0 \iff z = 0 \qquad |z| = |-z| = |\overline{z}|$$

$$|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z| \qquad |\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$$



Proposition 4. *Soit* $(z, z') \in \mathbb{C}^2$,

- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.
- *Si* $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

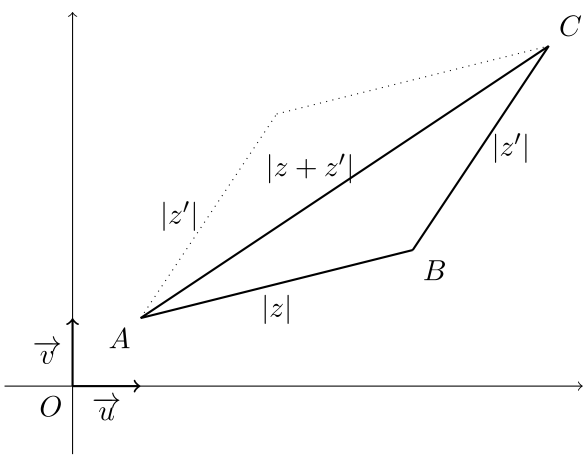
Proposition 5. *(Inégalité triangulaire) Pour tous complexes* z *et* z' *:*

$$\left|z + z'\right| \leqslant |z| + \left|z'\right|$$

De plus, $|z + z'| = |z| + |z'|$ *si et seulement si*

$$z' = 0 \text{ ou } z = \lambda z' \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

Notons z l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et z' l'affixe du vecteur $\overrightarrow{BC}$. Alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AC}$ est $z + z'$.



Preuve.

$$\begin{aligned}
\left|z + z'\right| \leqslant |z| + \left|z'\right| &\iff \left|z + z'\right|^2 \leqslant \left(|z| + \left|z'\right|\right)^2 \\
&\iff \left(z + z'\right)\left(\bar{z} + \bar{z'}\right) \leqslant |z|^2 + 2\,|z|\,\left|z'\right| + \left|z'\right|^2 \\
&\iff z\bar{z} + z\bar{z'} + z'\bar{z} + z'\bar{z'} \leqslant |z|^2 + 2\,|z|\,\left|z'\right| + \left|z'\right|^2 \\
&\iff |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\bar{z'}) + \left|z'\right|^2 \leqslant |z|^2 + 2\,|z|\,\left|z'\right| + \left|z'\right|^2 \\
&\iff \mathrm{Re}(z\bar{z'}) \leqslant \left|z\bar{z'}\right|.
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\left|z + z'\right| = |z| + \left|z'\right| &\iff \mathrm{Re}(z\bar{z'}) = \left|z\bar{z'}\right| \\
&\iff z\overline{z'} \in \mathbb{R}^+ \\
&\iff z' = 0 \text{ ou } z = \lambda z' \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}^+.
\end{aligned}$$

□

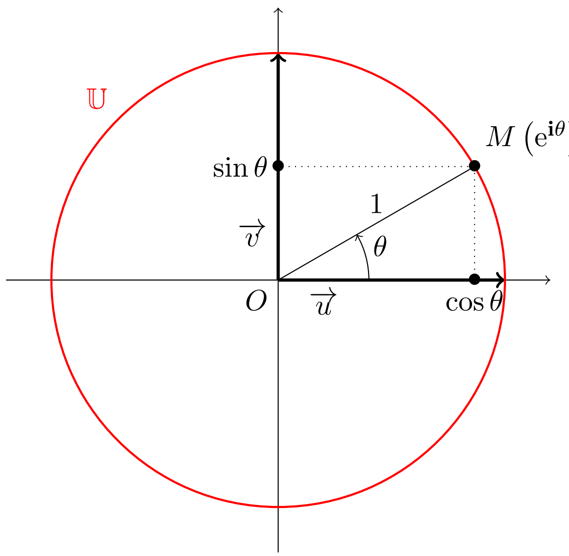
On déduit de l'inégalité triangulaire que pour tous complexes z et z' :

$$\boxed{\left|\,|z| - |z'|\,\right| \leqslant \left|z - z'\right|.}$$

3 Arguments d'un complexe non nul

3.1 Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$$



3.2 Notation $e^{\mathbf{i}\theta}$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on note

$$e^{\mathbf{i}\theta} = \cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta.$$

C'est un nombre complexe de module 1.

Réciproquement, si $z \in \mathbb{U}$, alors $z = x + iy$ avec $x^2 + y^2 = 1$. Il existe donc au moins un réel θ tel que $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$, c'est-à-dire $z = e^{\mathbf{i}\theta}$.

On en déduit que

$$\mathbb{U} = \left\{e^{\mathbf{i}\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\right\}$$

Proposition 6. (Formules d'Euler) *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:*

$$\cos\theta = \frac{e^{\mathbf{i}\theta} + e^{-\mathbf{i}\theta}}{2} \quad \textit{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{\mathbf{i}\theta} - e^{-\mathbf{i}\theta}}{2\mathbf{i}}.$$

Proposition 7. *Pour tous θ et φ réels :*

- $\overline{e^{\mathbf{i}\theta}} = e^{-\mathbf{i}\theta}$,
- $e^{\mathbf{i}(\theta+\varphi)} = e^{\mathbf{i}\theta}e^{\mathbf{i}\varphi}$,
- $e^{\mathbf{i}\theta} = e^{\mathbf{i}\varphi} \iff \theta = \varphi\ [2\pi]$.

Proposition 8. (Formule de Moivre) *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :*

$$\left(e^{\mathbf{i}\theta}\right)^n = e^{\mathbf{i}n\theta}$$

c'est-à-dire

$$(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathbf{i}\sin(n\theta).$$

Méthodologie : Linéarisation

Linéariser les expressions suivantes : $\sin^2(x)$ et $\cos^3(x)$.

$$
\begin{aligned}
\sin^2(x) &= \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathbf{i}x}}{2\mathbf{i}}\right]^2 \\
&= \frac{\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathbf{i}x}\right)^2}{(2\mathbf{i})^2} \\
&= -\frac{1}{4}\left(\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}\right)^2 - 2\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}\mathrm{e}^{-\mathbf{i}x} + \left(\mathrm{e}^{-\mathbf{i}x}\right)^2\right) \\
&= -\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}2x} + \mathrm{e}^{-\mathbf{i}2x} - 2\right) \\
&= -\frac{1}{4}\left(2\cos(2x) - 2\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos^3(x) &= \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathbf{i}x}}{2}\right]^3 \\
&= \frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathbf{i}x}\right)^3 \\
&= \frac{1}{8}\left(\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}\right)^3 + 3\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}\right)^2\mathrm{e}^{-\mathbf{i}x} + 3\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}\left(\mathrm{e}^{-\mathbf{i}x}\right)^2 + \left(\mathrm{e}^{-\mathbf{i}x}\right)^3\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}3x} + \mathrm{e}^{-\mathbf{i}3x}\right) + 3\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathbf{i}x}\right)\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(2\cos(3x) + 3 \times 2\cos(x)\right) \\
&= \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x).
\end{aligned}
$$

Méthodologie : Factorisation

Factoriser les expressions suivantes : $\sin(2x)$ et $\cos(x) + \cos(3x)$.

$$
\begin{aligned}
\sin(2x) &= \operatorname{Im}\left[\mathrm{e}^{\mathbf{i}2x}\right] \\
&= \operatorname{Im}\left[\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}\right)^2\right] \\
&= \operatorname{Im}\left[\left(\cos(x) + \mathbf{i}\sin(x)\right)^2\right] \\
&= \operatorname{Im}\left[\cos^2(x) - \sin^2(x) + 2\cos(x)\sin(x) \times \mathbf{i}\right] \\
&= 2\cos(x)\sin(x).
\end{aligned}
$$

On a

$$
\begin{aligned}
\cos(3x) &= \operatorname{Re}\left[\mathrm{e}^{\mathbf{i}3x}\right] \\
&= \operatorname{Re}\left[\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}x}\right)^3\right] \\
&= \operatorname{Re}\left[\left(\cos(x) + \mathbf{i}\sin(x)\right)^3\right] \\
&= \operatorname{Re}\left[\cos^3(x) + 3\cos^2(x) \times \mathbf{i}\sin(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) - \mathbf{i}\sin^3(x)\right] \\
&= \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x).
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\cos(x) + \cos(3x) &= \cos(x) + \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) \\
&= \cos(x)\left(1 + \cos^2(x) - 3\sin^2(x)\right) \\
&= 2\cos(x)\left(2\cos^2(x) - 1\right).
\end{aligned}
$$

3.3 Arguments d'un nombre complexe non nul

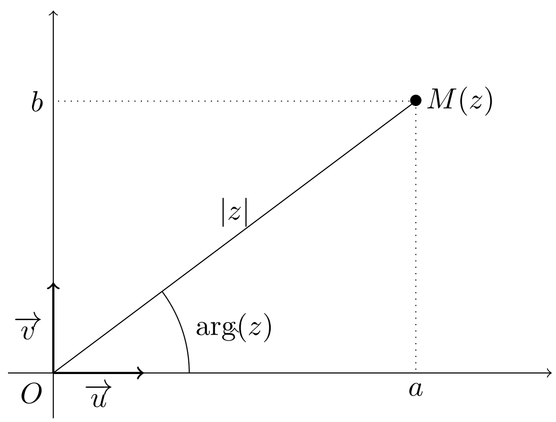
Définition 5. Soit $z = a + \mathbf{i}b \in \mathbb{C}^\star$.
On appelle **argument** de z tout réel θ vérifiant

$$z = |z|\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta},$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) = \dfrac{b}{|z|} \end{cases}.$$

Notation : $\arg(z) = \theta \ [2\pi]$.



Proposition 9. *Soient z et z' deux complexes non nuls,*

- $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z) \quad [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \quad [2\pi]$

Exercice 4. Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + \mathbf{i} \qquad z_2 = 1 - \sqrt{3}\mathbf{i} \qquad z_3 = -4 + 3\mathbf{i}$$

Théorème 2. *(Égalité de deux complexes) Soient z un complexe, $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.*

$$z = re^{\mathbf{i}\theta} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} |z| & = r \\ \arg(z) & = \theta \ [2\pi] \end{array} \right.$$

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathbf{i}$.

Proposition 10. (Factorisation de $1 \pm \mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}$)
Soit $\theta \in \mathbb{R}$,

$$1 + \mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta} = 2\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\theta}{2}}$$

et

$$1 - \mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta} = -2\mathbf{i}\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\theta}{2}}\ .$$

Exercice 6. Déterminer le module et un argument du nombre complexe

$$z = 1 + \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{12}}.$$

Proposition 11. (Transformer $a\cos x + b\sin x$)
Soient a et b deux réels tels que $(a,b) \neq (0,0)$.
On fixe
$$A = \sqrt{a^2+b^2}$$
et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que
$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$
Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\boxed{a\cos x + b\sin x = A\cos(x-\theta).}$$

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = 0.$$

3.4 Exponentielle complexe

Définition 6. Soit $z = x + \mathbf{i}y$ un nombre complexe, x et y étant des réels. On définit l'exponentielle du nombre complexe z de la façon suivante :
$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathbf{i}y}$$

Proposition 12. *Pour tout $(z,z') \in \mathbb{C}^2$, on a :*
$$\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z \times \mathrm{e}^{z'}.$$

4 Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

4.1 Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

A. Racines carrées d'un complexe

Définition 7. On appelle racine carrée d'un nombre complexe Δ, tout nombre complexe z tel que

$$z^2 = \Delta.$$

Proposition 13. *Tout complexe non nul admet exactement deux racines carrées oppposées.*

Proposition 14. *Soient $r > 0$ et θ deux réels.*

$$z^2 = re^{\mathbf{i}\theta} \iff z = -\sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\theta}{2}} \text{ ou } z = \sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\theta}{2}}.$$

Exemple. Les racines carrées de 4 sont : ....

Les racines carrées de -3 sont : ....

Les racines carrées de $2\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{2\pi}{3}}$ sont : ....

Les racines carrées de $\mathbf{i}$ sont : ....

Méthodologie : Déterminer les racines carrées d'un nombre complexe sous forme algébrique.

« Résoudre $z^2 = a + \mathbf{i}b$ » ou encore « déterminer les racines carrées du complexe $a + \mathbf{i}b$ ».

On cherche z sous la forme $z = x + \mathbf{i}y$.

$$\begin{aligned}
z^2 = a + ib &\iff (x + \mathbf{i}y)^2 = a + \mathbf{i}b \\
&\iff (x^2 - y^2) + 2xy\mathbf{i} = a + \mathbf{i}b \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcll} |z|^2 &=& |a + \mathbf{i}b| & \text{(Module)} \\ \mathrm{Re}(z^2) &=& \mathrm{Re}(a + \mathbf{i}b) & \text{(Re)} \\ \mathrm{Im}(z^2) &=& \mathrm{Im}(a + \mathbf{i}b) & \text{(Im)} \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{lcll} x^2 + y^2 &=& \sqrt{a^2 + b^2} & (1) \\ x^2 - y^2 &=& a & (2) \\ 2xy &=& b & (3) \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

(1) + (2) permet de déterminer x^2.
(1) − (2) permet de déterminer y^2.
On obtient quatre couples de solutions possibles. On en élimine deux en utilisant (3).

Exercice 8. Déterminer les racines carrées de $\Delta = 3 - 4\mathbf{i}$.

B. Résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Considérons l'équation

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (E)$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $a \neq 0$.

Proposition 15. *Les racines de $az^2 + bz + c$ sont*

$$\boxed{z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}}$$

où $\delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac$.

Cas particuliers :

- *Si $\Delta = 0$, $z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$: on parle de racine double.*
- *Si a, b, c sont réels et $\Delta \geqslant 0$, les racines sont réelles.*
- *Si a, b, c sont réels et $\Delta < 0$, les racines sont complexes conjuguées : $z_1 = \overline{z_2}$.*

Démonstration. On met le trinôme sous forme canonique :

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right].$$

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 &\iff \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2 = 0 \\ &\iff \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\right) = 0 \\ &\iff z = \frac{-b+\delta}{2a} \text{ ou } z = \frac{-b-\delta}{2a}. \end{aligned}$$

□

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.

Proposition 16. (Relations coefficients-racines)
Soit $(s,p) \in \mathbb{C}^2$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} z_1 + z_2 & = & s \\ z_1 \times z_2 & = & p \end{array}\right. \iff \begin{array}{c} z_1 \textit{ et } z_2 \textit{ sont les deux} \\ \textit{racines de l'équation} \\ z^2 - sz + p = 0. \end{array}$$

Exercice 10. Résoudre le système

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -1 \\ z_1 z_2 = 1 \end{cases},$$

d'inconnue $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$.

4.2 Racines n-ièmes

Soit $n \geqslant 2$ un entier.

Définition 8. Soit Δ un complexe non nul. On appelle **racine n-ième de Δ**, tout nombre complexe z tel que

$$z^n = \Delta.$$

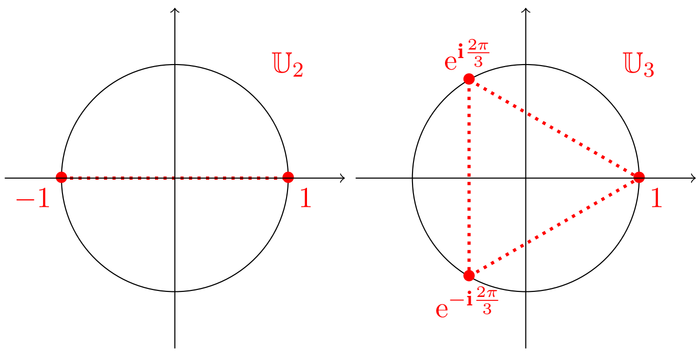
Les racines n-ièmes de 1 sont appelées **racines n-ièmes de l'unité**. Ce sont les complexes z tels que

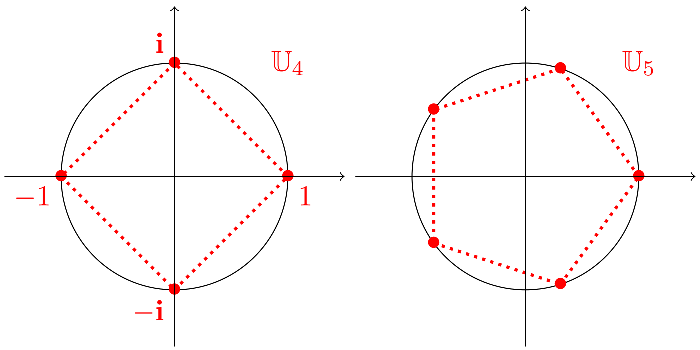
$$z^n = 1.$$

Proposition 17. *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.*

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{2k\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!] \right\}.$$

Il existe exactement n racines n-ièmes de l'unité.





Proposition 18. *Soient $r > 0$ et θ des réels, $\theta \in \mathbb{R}$.*

Le complexe $r\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}$ admet exactement n racines n-ièmes distinctes :

$$z^n = re^{\mathbf{i}\theta} \iff z = r^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{\mathbf{i}\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} \text{ avec } k \in [\![0, n-1]\!]$$

Exercice 11. Déterminer et représenter les racines cubiques de $8\mathbf{i}$, ainsi que les racines quatrièmes de $1 - \mathbf{i}$.

Proposition 19. *Soit $\omega \neq 1$ une racine n-ièmes de l'unité. Alors*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = 0.$$

En particulier, la somme des racines n-ièmes de l'unité est égale à 0.

Exercice 12. Soit $\omega = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{2\pi}{3}}$. Calculer $\dfrac{1}{1+\omega} + \dfrac{1}{1+\omega^2}$.

5 Interprétation géométrique des nombres complexes

5.1 Module et argument

Si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ sont deux points plan,

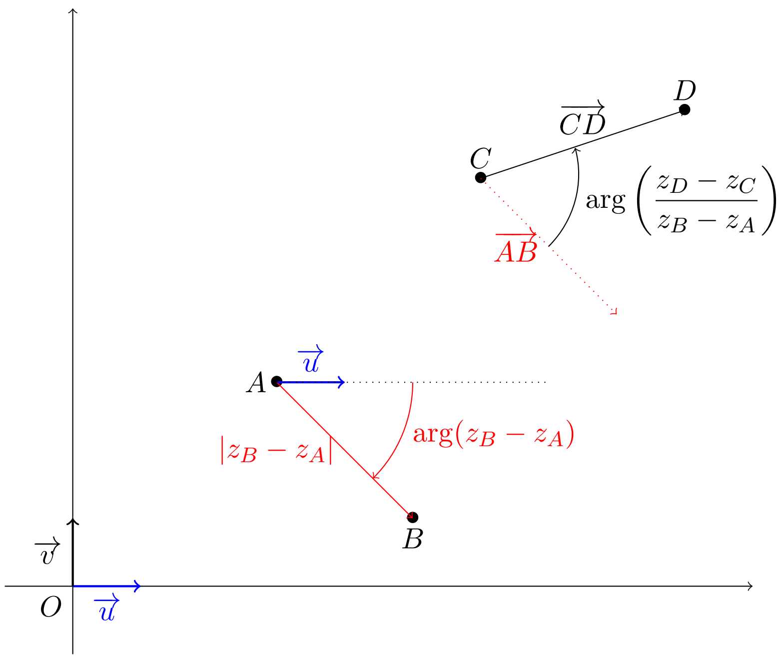
$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB = |z_B - z_A|$$

et

$$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg(z_B - z_A)\ [2\pi].$$

Si $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ sont quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$,

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi].$$



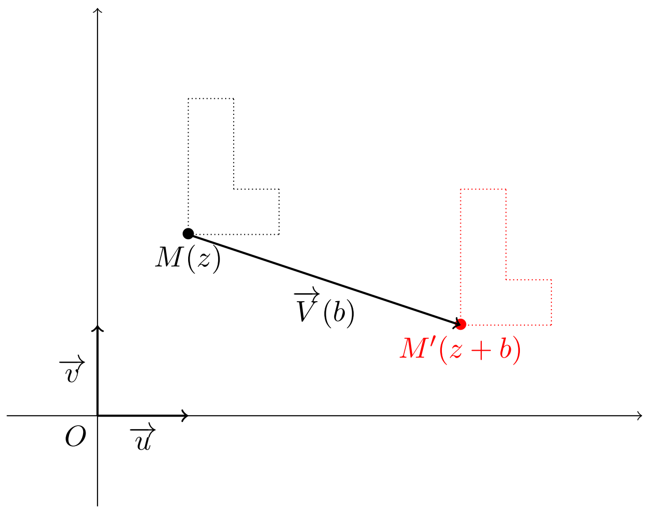
5.2 Interprétation géométrique de la somme

Translation de vecteur $\overrightarrow{V}$

Soit $\overrightarrow{V}$ un vecteur d'affixe b.

Définition 9. La **translation** de vecteur $\overrightarrow{V}$ est la transformation du plan qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{V}$.

Proposition 20. *L'image du point M d'affixe z par la translation de vecteur $\overrightarrow{V}$ est le point M' d'affixe $z' = z + b$.*



Démonstration. $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{MM'} \iff b = z' - z \iff z' = z + b.$ □

Remarque. La translation préserve les distances et les angles. C'est une transformation qui n'admet pas de point invariant.

5.3 Interprétation géométrique du produit

Rotation de centre A et d'angle θ

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et A un point du plan d'affixe a.

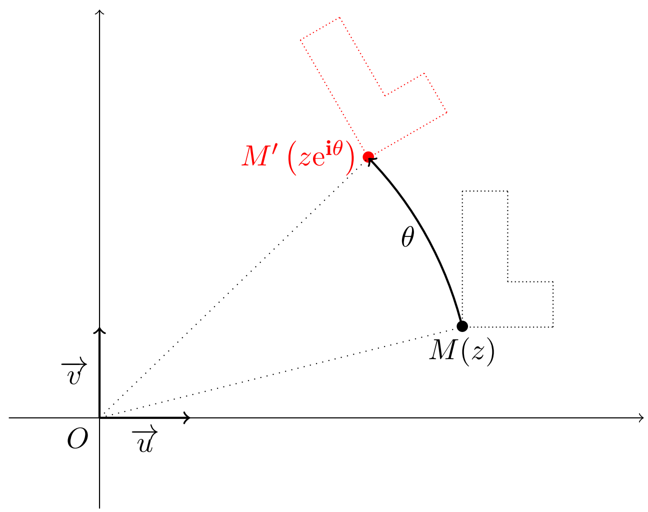
Définition 10. La **rotation** de centre A et d'angle θ est la transformation qui à tout point M du plan associe le point M' tel que

$$\begin{cases} M' = A & \text{si } M = A, \\ AM' = AM \text{ et } \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right) = \theta\ [2\pi] & \text{si } M \neq A. \end{cases}$$

Proposition 21. *L'image du point M d'affixe z par la rotation de centre A et d'angle θ est le point M' d'affixe z' telle que*

$$z' - a = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}(z-a).$$

En particulier, si $A = O$, $z' = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta} z$.



Démonstration. Si $M = A$, alors $z' - a = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta} \times 0 = 0$ donc $z' = a$ et $M' = A$.

Si $M \neq A$,

$$\begin{aligned} & AM' = AM \text{ et } \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right) = \theta\ [2\pi] \\ \iff & |z'-a| = |z-a| \text{ et } \arg\left(\frac{z'-a}{z-a}\right) = \theta[2\pi] \\ \iff & \left|\frac{z'-a}{z-a}\right| = 1 \text{ et } \arg\left(\frac{z'-a}{z-a}\right) = \theta\ [2\pi] \\ \iff & \frac{z'-a}{z-a} = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}. \end{aligned}$$

□

Remarque. La rotation préserve les distances et les angles. C'est une transformation qui admet un unique point invariant : le centre de la rotation.

Homothétie de centre A et de rapport λ

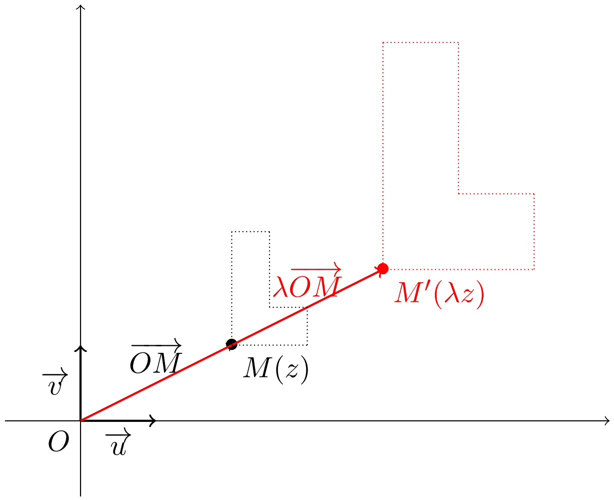
Soit $\lambda \neq 0$ un réel et A un point du plan d'affixe a.

Définition 11. L'**homothétie** de centre A et de rapport λ est la transformation du plan qui à tout point M du plan associe le point M' tel que $\overrightarrow{AM'} = \lambda \overrightarrow{AM}$.

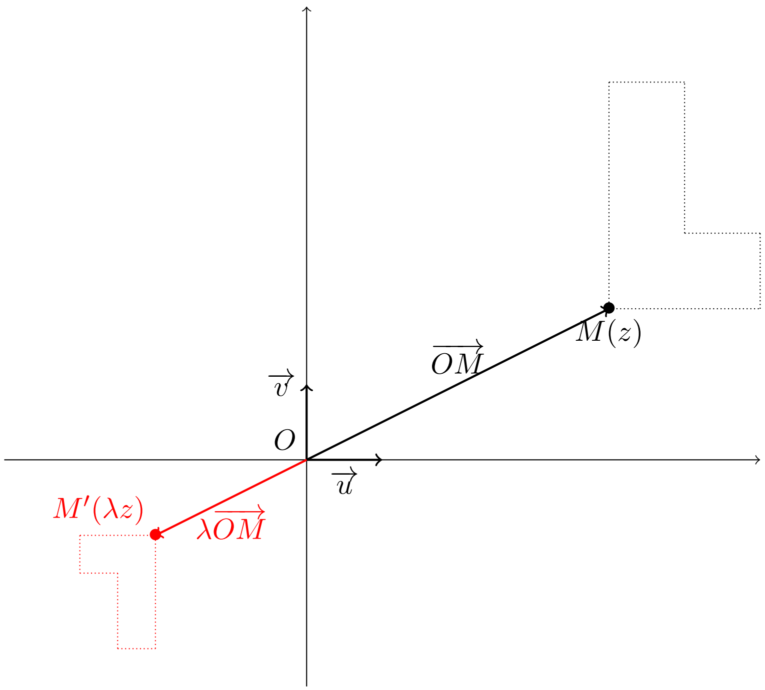
Proposition 22. *L'image du point M d'affixe z par l'homothétie de centre A et de rapport λ est le point M' d'affixe z' telle que*

$$z' - a = \lambda\,(z - a)\,.$$

En particulier, si $A = O$, $z' = \lambda z$.



Homothétie de centre O et de rapport $\lambda = 2$



Homothétie de centre O et de rapport $\lambda = -\frac{1}{2}$

Démonstration. $\overrightarrow{AM'} = \lambda \overrightarrow{AM} \iff z' - a = \lambda(z - a)$. □

Remarque. Une homothétie préserve les angles, mais multiplie les distances par $|\lambda|$. Une homothétie admet un unique point fixe : le centre de l'homothétie.

Exercice 13. Soit f la transformation du plan complexe qui, à un point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z'. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f lorsque :

1. $z' = z + 3 - i$,
2. $z' = 2z + i$,
3. $z' = iz + 1$.