Chapitre 7 : Étude pratique des systèmes linéaires

Un chapitre, un mathématicien

Carl Friedrich Gauss
(1777 - 1855)

Gauss naît à Brunswick dans une famille modeste. Les aptitudes de cet enfant prodige sont vite remarquées. Il obtient en 1792 une place au Collegium Carolinum à Brunswick, un établissement créé pour accueillir les lycéens de talent. Ses dons lui valent une bourse du duc de Brunswick, et il rejoint trois ans plus tard l'université de Göttingen, où ses premiers résultats le font connaître du monde scientifique : il découvre le procédé de construction à la règle et au compas de l'heptadécagone, polygone régulier à 17 côtés, qui était un problème ouvert depuis la Grèce classique. Il publie en 1801 son ouvrage fondamental, les *Disquisitiones arithmeticae*. La même année, sa redécouverte, par le calcul, de l'astéroïde Cérès ajoute à sa réputation. En 1807 il devient le directeur de l'Observatoire de Göttingen. Tourné vers la géodésie et l'astronomie, Gauss délaisse les mathématiques. L'arrivée de Wilhelm Weber à Göttingen le stimule : les deux hommes fondent la théorie du magnétisme. Vers la fin de sa carrière, Gauss se soucie enfin de la formation de quelques étudiants, avec efficacité d'ailleurs, comme en témoignent ses plus célèbres élèves : Eisenstein, Riemann et Dedekind.

Carl Friedrich Gauss fut baptisé « le prince des mathématiques », un titre qui jamais ne lui fut disputé dans les deux siècles qui suivirent sa mort.

1 Exemple : deux droites dans le plan

L'équation d'une droite dans le plan (Oxy) s'écrit

$$ax + by = e$$

où a, b et e sont des paramètres réels, $(a, b) \neq (0, 0)$. Cette équation s'appelle *équation linéaire* dans les variables (ou inconnues) x et y.

Par exemple, $2x + 3y = 6$ est une équation linéaire, alors que les équations suivantes ne sont pas des équations linéaires :

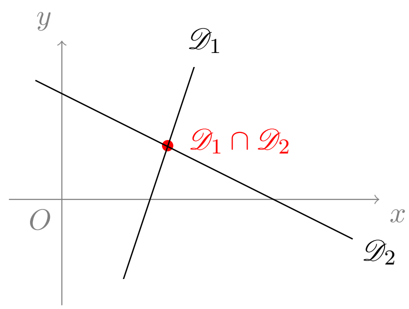
$$2x + y^2 = 1 \quad \text{ou} \quad y = \sin(x) \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{y}.$$

Considérons maintenant deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ et cherchons les points qui sont simultanément sur ces deux droites. Un point (x, y) appartient à $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2$ s'il est solution du système :

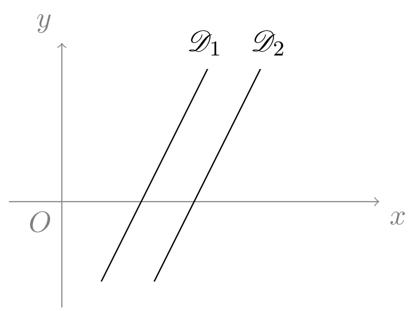
$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \quad (S).$$

Trois cas se présentent alors :

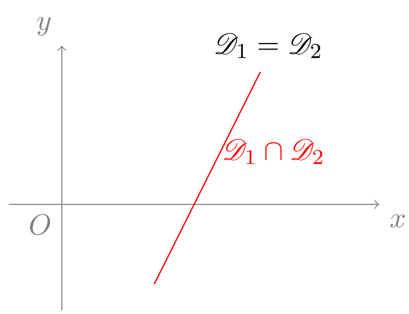
1. Les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ se coupent en un seul point.
   Dans ce cas, le système (S) a une unique solution.



2. Les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont parallèles.
   Dans ce cas, le système (S) n'a pas de solution.



3. Les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont confondues.
   Dans ce cas, le système (S) admet une infinité de solutions.



Ces trois cas de figure (une unique solution, aucune solution, une infinité de solutions) sont les seuls cas qui peuvent se présenter quel que soit le système d'équations linéaires considéré.

2 Systèmes linéaires

2.1 Présentation

Dans ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.
Soient $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ et $(b_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ deux familles d'éléments de $\mathbb{K}$.

On travaille avec un système linéaire de n équations à p inconnues qui a la forme suivante :

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right. .$$

Un tel système est d'**inconnue** $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$.

Données du système :

Les nombres $a_{i,j}$ sont appelés **coefficients** du système.
Les nombres $b_1, b_2, \dots, b_n$ constituent le **second membre** du système.

Définition. Un système qui admet des solutions est dit **compatible**. Un système dont le second membre est nul (c'est-à-dire $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$) est dit **homogène**.

Remarque. Un système homogène est toujours compatible.

2.2 Systèmes équivalents

Les opérations suivantes sont appelées *opérations élémentaires sur les lignes* d'un système :

- échanger deux lignes L_i et L_j (notation : $L_i \leftrightarrow L_j$)

$$\left\{\begin{array}{rcrl} 4x_1 & + & 2x_2 & = 2 \\ x_1 & - & x_2 & = 2 \end{array}\right. \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff}$$

- multiplier la ligne L_i par $\lambda \neq 0$ (notation : $L_i \leftarrow \lambda L_i$)

$$\left\{\begin{array}{rcrl} x_1 & - & x_2 & = 2 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & = 2 \end{array}\right. \underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2}{\iff}$$

- ajouter λL_j à L_i pour $i \neq j$ et λ quelconque (notation : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$)

$$\left\{\begin{array}{rcrl} x_1 & - & x_2 & = 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & = 1 \end{array}\right. \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff}$$

Définition. Deux systèmes sont dits **équivalents** si l'on passe de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires.

Proposition. Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.

2.3 Notation matricielle

On considère le système d'inconnue $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$

$$(S) \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 4 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 3 \end{array}\right. \begin{array}{l} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3) \\ (L_4) \end{array}$$

On appelle matrice du système (S) la matrice

$$A =$$

et matrice augmentée du système (S) la matrice

$$(A \,|\, B) =$$

où B désigne le vecteur colonne des seconds membres.

Par la suite on écrira

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

2.4 Échelonnement et algorithme de Gauss-Jordan

Définition. Une matrice est dite **échelonnée en lignes** si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

1. si une ligne est entièrement nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi ;
2. à partir de la deuxième ligne non entièrement nulle, le premier coefficient non nul est situé à droite du coefficient non nul de la ligne précédente

Définition. Le premier coefficient non nul de chaque ligne non entièrement nulle est appelé **pivot**.

Théorème. Tout système linéaire ayant au moins un coefficient non nul est équivalent à un système échelonné.

2.5 Deux exemples

Exemple 1

Résoudre le système d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & & & - & 2z & = & 1 \end{array}\right. .$$

Exemple 2

Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre le système d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & a \\ 2x & + & 5y & + & 3z & = & a+1 \\ 3x & + & 7y & + & 5z & = & 2a \\ x & + & 3y & + & 2z & = & a \end{array}\right. .$$

2.6 Ensemble des solutions

Théorème. Tout système linéaire de n équations à p inconnues admet soit :

- une unique solution,
- aucune solution,
- une infinité de solution.

3 Limitation des calculs

3.1 Problème des dénominateurs

Exemple 3

Résoudre le système $\left\{\begin{array}{ccccc} 7x & + & 4y & = & 1 \\ 4x & + & 3y & = & 1 \end{array}\right.$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

3.2 Problème de compatibilité

cf. Exemple 2

3.3 Problème des systèmes carrés paramétrés

Définition. Un système linéaire de n équations à p inconnues est dit **carré** si $n = p$.

À chaque système linéaire carré, on associe un élément de $\mathbb{K}$, appelé déterminant du système (S), noté $\det(S)$.

Théorème. Si $\det(S) \neq 0$, le système (S) admet une unique solution. Si $\det(S) = 0$, le système (S) admet soit une infinité de solutions, soit aucune solution.

Remarque. Si $\det(S) \neq 0$, le système (S) est compatible.

Déterminant de systèmes 2×2

<u>Données</u> : a,b,c,d,e,f sont des éléments de $\mathbb{K}$ fixés.

<u>Inconnue</u> : $(x,y)\in\mathbb{K}^2$

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & e \\ cx & + & dy & = & f \end{array}\right.$$

$$\boxed{\det(S)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc.}$$

Déterminant de systèmes 3×3

<u>Données</u> : a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l sont des éléments de $\mathbb{K}$ fixés.

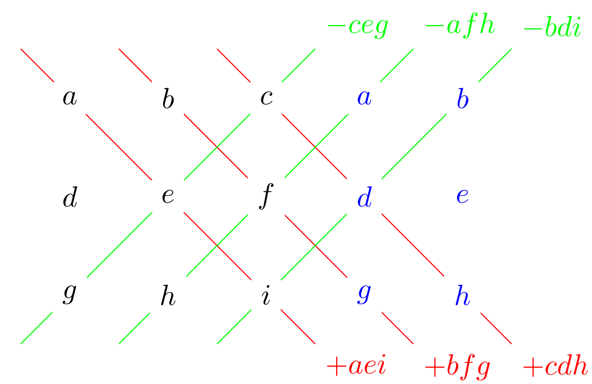
<u>Inconnue</u> : $(x,y,z)\in\mathbb{K}^3$

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} ax & + & by & + & cz & = & j \\ dx & + & ey & + & fz & = & k \\ gx & + & hy & + & iz & = & l \end{array}\right.$$

$$\boxed{\det(S)=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}\underset{\text{Sarrus}}{=}\begin{array}{c} aei+bfg+cdh \\ -ceg-afh-bdi \end{array}}$$

Règle de Sarrus

Étape 1 : réécrire les deux premières colonnes.
Étape 2 : pour chaque diagonale rouge, ajouter le produit des termes qui apparaissent.
Étape 3 : pour chaque diagonale verte, soustraire le produit des termes qui apparaissent.



Remarque. La règle de Sarrus ne s'applique qu'au calcul de déterminants 3×3.

Exemple. Calculer le déterminant des systèmes suivants :

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=0 \end{cases} \quad (S_1) \quad \text{et} \quad \begin{cases} x-y+4z=1 \\ 3x+5y+4z=0 \\ -2z=3 \end{cases} \quad (S_2).$$

Exemple 4

Soit $a\in\mathbb{R}$. On considère le système d'inconnue $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccc} x & - & ay & = & 1 \\ ax & - & y & = & 2-a \end{array}\right. .$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante (CNS) sur a pour que le système (S) soit compatible.