Chapitre 8 : Géométrie élémentaire du plan

du

siècle

Jésus-Christ,

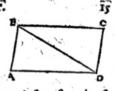
mathématiques

que la re-

d'Euclide

Un chapitre, un mathématicien

Or est icy à notter que quand d'vn angle de quelconque figure quadrilatere on tire vne ligne droitée à l'angle opposé; cette ligne est appellée diametre par aucuns, & diagonalle par d'autres; ainsi au quadrilatere ABCD la ligne BD, menee de l'angle B à son opposé D est dicte diagonalle, ou diametre.



35. Lignes droictes paralleles, sont celles qui estans sur vn mesme plan, & prolongées infiniment de part & d'autre ne se rencontrent iamais.

Afin que les lignes droictes soient dictes paralleles, ou equidistantes, il ne suffir pas qu'estans prolongées infiniment de part & d'autre, elles ne viennent iamais à se rencontrer; mais il est aussi necessaire qu'elles soient en vne mesme superficie plane: Cax plusieurs lignes droictes n'estans en vne mesme superficie, pourroient bien estre prolongées à l'insiny & ne serencontrer iamais, lesquelles toutes sois ne seroient dites paralleles. Comme par exemple, si deux lignes droictes posses de trauers au milieu de sair ne se touchent point, bien qu'elles soient prolongées tant qu'on voudra, elles ne se rencontreront iamais, & toutessois el-

les ne seront termais, & toutessois elles ne seront pas dittes paralleles. Parquoy
les deux lig. droitées AB, & CD, lesquelles
sont en voie mesme superficie plane, & qui
estans prolongees à l'infiny tant de la part de
A.C, que de B, D, ne se rencontrent iamais, seront dick

A.C. que de B. D., ne se rencontrent iamais. seront dictes lignes paralleles.
Oriey finissent les definitions du premier liute d'Euclide: Mais d'autant qu'en ce mesme liure est souvent parlè de parallelogramme, & de leurs complemens, lesquels Euclide n'a point desiny, nous adjousterons icy leurs definitions.

à Alexandrie alors que
Ptolémée I^{er} organise
le Museum et fait de
sa capitale le centre
culturel du monde
hellénistique. L'ouvrage
ments, est en fait un manuel qui
matiques de l'époque en géométrie

À

troisième

avant

époque nommée

les

l'aube

grecques sont à leur apogée. C'est à cette

se manifeste. On ne

sait pratiquement rien

de son existence. Sans

doute d'origine grecque, probablement éduqué

à Athènes, il s'installe

fondamental d'Euclide, intitulé *Les Éléments*, est en fait un manuel qui regroupe toutes les connaissances mathématiques de l'époque en géométrie métrique, coniques exceptées, et en théorie des nombre. *Les Éléments* se composent de treize livres qui souvent reprennent les découvertes faites par ses prédécesseurs. Les énoncés, les constructions et les démonstrations lui sont redevables, il est l'auteur de nombreux résultats nouveaux.

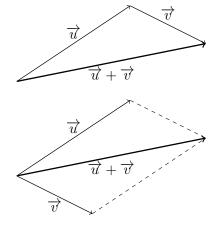
1 Repérage dans le plan

Dans ce chapitre, on notera ${\mathscr P}$ l'ensemble des points du plan et $\overline{{\mathscr P}}$ l'ensemble des vecteurs du plan.

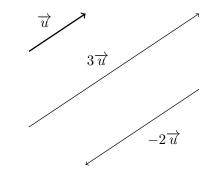
1.1 Rappels

L'ensemble $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ des vecteurs du plan est muni d'une addition, notée +, et d'un produit par un réel, noté \cdot .

Addition vectorielle

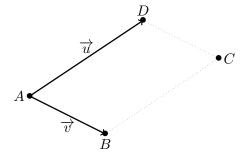


Produit d'un vecteur \vec{u} par un réel k



Translaté d'un point par un vecteur

Définition. Soient $M \in \mathscr{P}$ et $\overrightarrow{u} \in \mathscr{P}$. Le translaté de M par \overrightarrow{u} est le point « extrémité » du vecteur \overrightarrow{u} lorsque l'on place son origine en M. Notation : $M \oplus \overrightarrow{u}$.



Repère cartésien

Définition. (Base de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ - Coordonnées d'un vecteur) On dit que deux vecteurs \overrightarrow{i} , \overrightarrow{j} de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ forment une **base de** $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ si et seulement si:

pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$, il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\overrightarrow{u} = \alpha \overrightarrow{i} + \beta \overrightarrow{j}$$
.

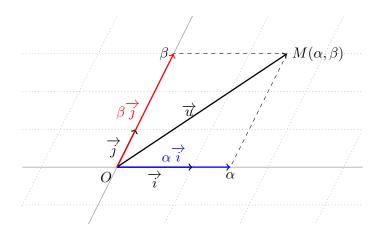
On appelle **coordonnées de** \overrightarrow{u} **dans la base** $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ le couple (α, β) .

Définition. (Repère de \mathscr{P} - Coordonnées d'un point)

Un repère cartésien du plan est la donnée d'un point O appelé origine **du repère** et d'une base (\vec{i}, \vec{j}) de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$. On note $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ le repère associé. Soit $M \in \mathscr{P}$. Alors $\overrightarrow{OM} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$ et il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\overrightarrow{OM} = \alpha \overrightarrow{i} + \beta \overrightarrow{j}$$
.

On appelle coordonnées de M dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ le couple (α, β) .



Proposition. Soient $(A, B) \in \mathscr{P}^2$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in (\overrightarrow{\mathscr{P}})^2$. On note

 (x_A, y_A) les coordonnées de A dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, (x_B, y_B) les coordonnées de B dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, les coordonnées de \overrightarrow{u} dans $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, (u_1, u_2) les coordonnées de \overrightarrow{v} dans $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. (v_1, v_2)

Alors les coordonnées de :

- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ dans sont
- dans sont
- dans sont
 - sont
- dans sont

où I est le milieu du segment [AB].

	Expression analytique	Translation t de vecteur $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$
	Ensemble de couples de ℝ²	Cercle de centre O et de rayon 1
	Coordonnées dans $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$	Vecteur \overrightarrow{u}
	Coordonnées dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$	Point M
Notations dans \mathbb{R}^2	\mathbb{R}^2 Objets analytiques	Plan Objets géométriques

Identification du plan avec \mathbb{R}^2 .

1.3 Recherche des repères de ${\mathcal P}$

Caractérisation analytique des repères du plan.

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan.

On note (u_1, u_2) les coordonnées du vecteur \overrightarrow{u} dans $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, (v_1, v_2) les coordonnées du vecteur \overrightarrow{v} dans $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Définition. On appelle **déterminant de** $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ **dans la base** $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et on note $\det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ le réel suivant :

$$\det_{(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \left| \begin{array}{cc} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{array} \right| = u_1v_2 - u_2v_1.$$

Théorème. $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base de $\overrightarrow{\mathscr{P}} \iff \det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})} (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \neq 0$.

Caractérisation géométrique des bases.

Définition. Deux vecteurs \overrightarrow{u} et \overrightarrow{v} sont **colinéaires** si et seulement si il existe k un réel tel que

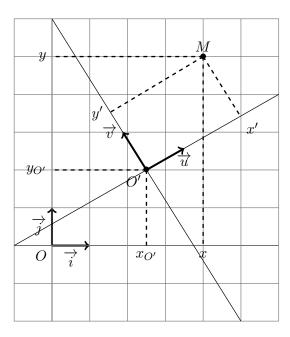
$$\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$$
 ou $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.

Remarque. • Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.

- Deux vecteurs colinéaires ont même direction.
- \bullet Les coordonnées de deux vecteurs colinéaires sont proportionnelles.

Théorème. $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base de $\overrightarrow{\mathscr{P}} \iff \overrightarrow{u}$ et \overrightarrow{v} ne sont pas colinéaires.

1.4 Changement de repères



On considère deux repères distincts : $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et $\mathcal{R}' = (O', \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Soit M un point du plan.

Alors:

$$\begin{cases} x = x_{O'} + x'u_1 + y'v_1 \\ y = y_{O'} + x'u_2 + y'v_2 \end{cases}.$$

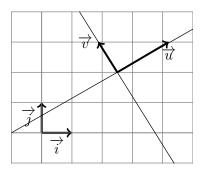
1.5 Orientation - Repère orthogonal - Repère orthonormal.

Orientation du plan.

Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$.

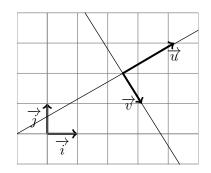
Une base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ est dite **de même orientation** que $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ si et seulement si

$$\det_{(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) > 0.$$



Une base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ est dite **d'orientation contraire** à $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ si et seulement si

$$\det_{(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) < 0.$$

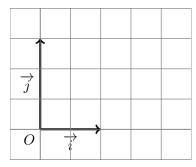


Orienter $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ revient à choisir une base $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ de référence. Toute base de même orientation que $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ est dite **directe** et toute autre base est dite **indirecte**.

Repère orthogonal.

On dit que $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est un repère orthogonal de \mathscr{P} si et seulement si :

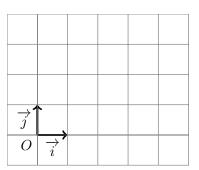
- $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est une base de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$
- $\bullet \ (\widehat{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}}) = \frac{\pi}{2}[\pi].$



Repère orthonormé.

On dit que $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est un **repère orthonormé de** \mathscr{P} si et seulement si :

- $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est une base de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$
- $\|\overrightarrow{i}\| = \|\overrightarrow{j}\| = 1$
- $\bullet \ (\widehat{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}}) = \frac{\pi}{2}[\pi].$



Repère direct.

On oriente $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ en fixant une base de référence $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

On dit que $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un **repère direct de** $\mathscr P$ si et seulement si :

$$\det_{(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) > 0.$$

Remarque. Le choix d'un repère orthonormal direct permet d'identifier le plan à \mathbb{C} .

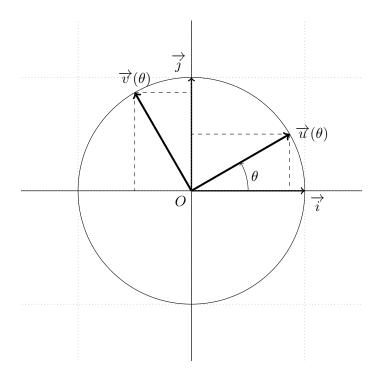
1.6 Repère polaire - Coordonnées polaires.

On munit \mathscr{P} d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Définition. (Repère polaire) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $(O, \overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta))$ l'image du repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ par la rotation de centre O d'angle θ : $(O, \overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta))$ est encore un repère orthonormal direct du plan. On l'appelle **repère polaire** attaché au réel θ .

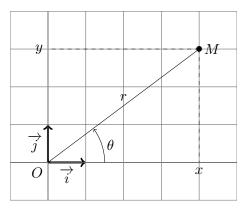
Pour tout réel θ , on a :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \overrightarrow{u}(\theta) & = \\ \overrightarrow{v}(\theta) & = \end{array} \right.$$



Définition. (Coordonnées polaires d'un point) Soit M un point de \mathscr{P} de coordonnées (x,y) dans \mathcal{R} . On dit que (r,θ) est un **couple de coordonnées polaires de** M si et seulement si

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}.$$



Remarque. Si $M \in \mathscr{P}$ a pour affixe $z \neq 0$, alors un couple de coordonnées polaires de M est donné par (r,θ) où r est le module de z et θ est un argument de z.

Remarque. Contrairement aux coordonées cartésiennes, les coordonnées polaires d'un point ne sont pas uniques : le point M de coordonnées polaires (r, θ) a aussi pour coordonnées polaires $(r, \theta + 2\pi)$ et $(-r, \theta + \pi)$.

Méthodologie : Passer des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes.

Soit $M \in \mathscr{P}$ de coordonnées polaires (r, θ) . Les coordonnées cartésiennes de M dans \mathcal{R} sont $(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

Exemple. Soit $M \in \mathscr{P}$ de coordonnées polaires $(-2, \frac{5\pi}{6})$. Les coordonnées cartésiennes de M dans \mathscr{R} sont

Méthodologie : Passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires.

Soit $M \in \mathscr{P}$ de coordonnées cartésiennes (x,y) dans \mathscr{R} . Un couple de coordonnées polaires de M est donné par (r,θ) où

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
 et θ tel que
$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{r} \\ \sin \theta = \frac{y}{r} \end{cases}$$
.

Exemple. Soit M un point de coordonnées (1,1) dans \mathcal{R} . Un couple de coordonnées polaires de M est

2 Produit scalaire

2.1 Présentation

Définition. (Produit scalaire) On appelle **produit scalaire de** \overrightarrow{u} et \overrightarrow{v} et on note

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$$
 ou $(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v})$ ou $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$

le réel défini par :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 & \text{si } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \text{ ou } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}, \\ \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| ||\overrightarrow{v}|| \cos(\theta) & \text{sinon,} \end{cases}$$

où θ est une mesure de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Remarque.

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}||^2$$

Théorème. \overrightarrow{u} et \overrightarrow{v} sont orthogonaux $\iff \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$. Notation : $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Proposition. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in (\overrightarrow{\mathscr{P}})^3$.

1. Symétrie du produit scalaire :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$$

2. Bilinéarité du produit scalaire :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\lambda \overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \lambda (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) & \text{et} & (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} \\ \overrightarrow{u} \cdot (\lambda \overrightarrow{v}) = \lambda (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) & \text{et} & \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} \end{array} \right.$$

Remarque. Grâce à ces deux propriétés (symétrie et bilinéarité), le produit scalaire se manipule « formellement » comme un produit usuel.

Exercice 1. Montrer que pour tout $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in (\overrightarrow{\mathscr{P}})^2$,

1.
$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$$
,

2.
$$\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$$

3.
$$\|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2 = (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$$
.

Interpréter le produit scalaire en termes de projection orthogonale.

Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base orthonormée de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$. On appelle θ une mesure de l'angle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u})$.

Les coordonnées de \overrightarrow{u} dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ sont $(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{i}, \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{j})$.

2.2 Expression analytique

Théorème. On munit $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ d'une base **orthonormée** $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in (\overrightarrow{\mathscr{P}})^2$.

On note (x,y) les coordonnées de \overrightarrow{u} dans $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$, (x',y') les coordonnées de \overrightarrow{v} dans $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + yy'.$$

Démonstration.

Proposition. On munit $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ d'une base **orthonormée directe** $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ permettant d'identifier $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et \mathbb{C} . Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in (\overrightarrow{\mathcal{P}})^2$. On note z l'affixe du vecteur \overrightarrow{u} et z' l'affixe du vecteur \overrightarrow{v} . Alors

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \operatorname{Re}(\overline{z}z').$$

Démonstration.

3 Déterminant dans un base orthonormée directe

On munit $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ d'une base **orthonormée directe** $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Théorème. Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in (\mathscr{P})^2$ non nuls. On note θ une mesure de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Alors :

$$\det_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})} (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \sin \theta.$$

Démonstration.

Le déterminant d'un couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de vecteurs dans une base orthonormale directe est indépendant de la base orthonormale directe choisie.

Ce déterminant est aussi appelé **produit mixte** de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et noté $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$.

Théorème. \overrightarrow{u} et \overrightarrow{v} sont colinéaires $\iff [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = 0$.

Proposition. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in (\overrightarrow{\mathscr{P}})^3$.

1. Antisymétrie du produit mixte :

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = -[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}]$$

2. Bilinéarité du produit mixte :

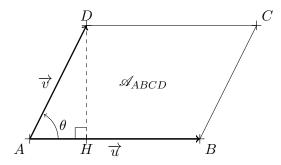
$$\left\{ \begin{array}{ll} [\lambda \overrightarrow{u},\overrightarrow{v}] = \lambda \left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right] & \text{et} & [\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}] = \left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}\right] + \left[\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\right] \\ [\overrightarrow{u},\lambda \overrightarrow{v}] = \lambda \left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right] & \text{et} & [\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}] = \left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right] + \left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}\right] \end{array} \right.$$

Proposition. On munit $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ d'une base **orthonormée directe** $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ permettant d'identifier $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ et \mathbb{C} . Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in (\overrightarrow{\mathscr{P}})^2$. On note z l'affixe du vecteur \overrightarrow{u} et z' l'affixe du vecteur \overrightarrow{v} . Alors

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \operatorname{Im}(\overline{z}z').$$

Interpréter un déterminant en termes d'aire d'un parallélogramme.

Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in (\overrightarrow{\mathscr{P}})^2$ non colinéaires.



On appelle H le projeté orthogonal de D sur la droite (AB). On note θ une mesure de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et \mathscr{A}_{ABCD} l'aire du parallélogramme ABCD.

Montrons que :

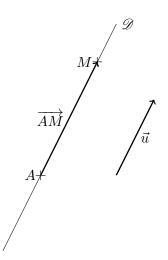
$$\mathscr{A}_{ABCD} = \left| \ [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] \right|$$

4 Droites

Définition. (Droite, Vecteur directeur) Soient A un point et \overrightarrow{u} un vecteur non nul. La **droite** \mathscr{D} **passant par** A **et de vecteur directeur** \overrightarrow{u} est l'ensemble des points M pour lesquels il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\overrightarrow{AM} = t \cdot \overrightarrow{u}.$$

Tout vecteur non nul colinéaire à \vec{u} est appelé vecteur directeur de la droite \mathcal{D} .



4.1 Utilisation du produit scalaire et du déterminant

Le produit scalaire et le déterminant constituent deux outils essentiels pour exprimer que deux vecteurs $\overrightarrow{u}=(x,y)$ et $\overrightarrow{v}=(x',y')$ sont orthogonaux ou colinéaires :

$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$$

(dans une base orthonormale xx' + yy' = 0).

$$\overrightarrow{u}$$
 // \overrightarrow{v} \iff $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = 0$

(dans une base quelconque $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = 0$).

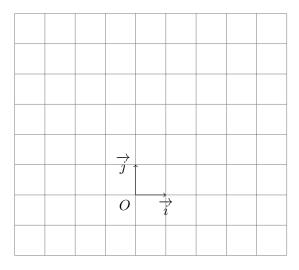
Remarque. A,B,C sont alignés si et seulement si $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=0.$

Projeté orthogonal d'un point sur une droite

On munit le plan \mathscr{P} d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

On considère les points A(-1,1), B(3,-1), C(1,4).

Déterminer les coordonnées dans \mathcal{R} du point H projeté orthogonal de C sur la droite (AB).



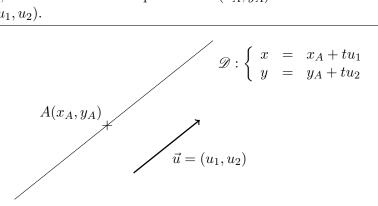
4.2 Représentation paramétrique d'une droite

On utilise cette représentation lorsque l'on connaît les coordonnées d'un point et d'un vecteur directeur de la droite étudiée.

Proposition. Soient $A=(x_A,y_A)$ un point et $\vec{u}=(u_1,u_2)$ un vecteur non nul. La droite \mathscr{D} passant par A et dirigée par \vec{u} admet comme représentation paramétrique :

$$\mathscr{D}: \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_A + tu_1 \\ y & = & y_A + tu_2 \end{array} \right., \ t \in \mathbb{R}.$$

Réciproquement, tout système de cette formme représente une droite de \mathscr{P} , dont on connaît un point $A = (x_A, y_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u} = (u_1, u_2)$.



Une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}: y=2x+1$ est :

.....

.....

Décrire l'ensemble $\mathscr{E}: \begin{cases} x=1-t \\ y=2t-1 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$

.....

4.3 Équation cartésienne d'une droite

On travaille dans $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Proposition. Si \mathscr{D} est une droite de \mathscr{P} , il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(a,b) \neq (0,0)$ et

$$ax + by + c = 0$$

soit une équation cartésienne de \mathcal{D} dans \mathcal{R} .

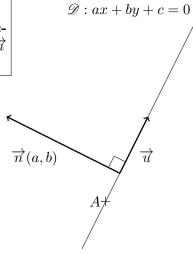
Réciproquement : soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(a, b) \neq (0, 0)$, l'ensemble des points de \mathscr{P} dont une équation cartésienne est ax + by + c = 0 est une droite dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{u} = (-b, a)$.

Méthodologie : Passer d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique.

Méthodologie : Passer d'une représentation paramétrique à une représentation cartésienne.

4.4 Droite définie par un point et un vecteur normal

Définition. (Vecteur normal) Soit \mathscr{D} une droite de \mathscr{P} . On appelle **vecteur normal à** \mathscr{D} tout vecteur non nul \overrightarrow{n} orthogonal à un vecteur directeur de \mathscr{D} .



Proposition. On munit \mathscr{P} d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soient $A = (x_A, y_A)$ un point et $\overrightarrow{n} = (a, b)$ un vecteur non nul. Une équation cartésienne de la droite \mathscr{D} passant par A et de vecteur normal \overrightarrow{n} est

$$\mathscr{D}: ax + by + c = 0$$

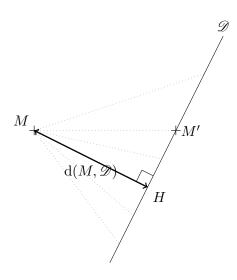
avec $c = -ax_A - by_A$.

Démonstration.

Méthodologie : Déterminer une équation cartésienne d'une droite définie par un point et un vecteur normal.

4.5 Distance d'un point à une droite

Définition. Soient \mathscr{D} une droite de \mathscr{P} et M un point de \mathscr{P} . On appelle **distance de** M à \mathscr{D} et on note $d(M,\mathscr{D})$ la plus petite distance entre M et un point de \mathscr{D} .



Proposition. Soient $\mathcal D$ une droite de $\mathcal P$ et M un point de $\mathcal P$. Soit H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal D$. Alors

$$d(M, \mathcal{D}) = MH$$
.

Théorème. On munit \mathscr{P} d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soient

$$\mathscr{D} : ax + by + c = 0$$

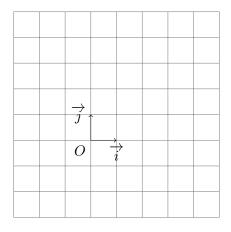
une droite de \mathscr{P} et $M(x_M, y_M)$ un point de \mathscr{P} . Alors

$$d(M, \mathscr{D}) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Exercice 2. On considère le point M(4,2) et la droite \mathcal{D} passant par A(1,1) dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u} = (3,-2)$.

Déterminer et représenter $d(M, \mathcal{D})$.

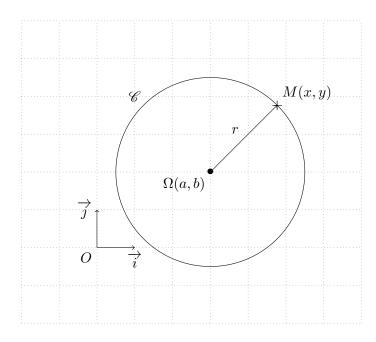
Indication : On commencera par déterminer une équation cartésienne de \mathcal{D} .



5 Cercles

Définition. Soient $\Omega \in \mathscr{P}$ et r > 0. On appelle **cercle de centre** Ω **et de rayon** r l'ensemble des points M tels que

$$\Omega M = r$$
.



5.1 Équation cartésienne d'un cercle

On munit \mathscr{P} d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Proposition. Une équation cartésienne du cercle $\mathscr C$ de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon r>0 est :

$$\mathscr{C} : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Proposition. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On note \mathcal{A} l'ensemble des points de \mathscr{P} dont une équation cartésienne est $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$. Alors \mathcal{A} est un cercle, un point ou le vide.

Démonstration.

Exemple. Décrire l'ensemble des points $\mathcal A$ de $\mathscr P$ dont une équation cartésienne est :

1.
$$x^2 + y^2 - x - 2y - 5 = 0$$
.

2.
$$x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 0$$
.

3.
$$x^2 + y^2 + 4x + 5 = 0$$
.

5.2 Cercle défini par son diamètre

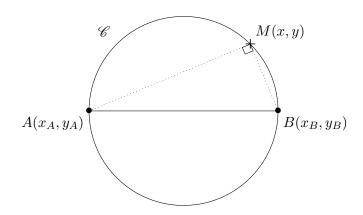
Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points distincts de \mathscr{P} .

Proposition. On considère $\mathscr C$ le cercle de diamètre [A,B]. Alors :

$$M \in \mathscr{C} \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

Une équation cartésienne du cercle $\mathscr C$ est donc

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0.$$



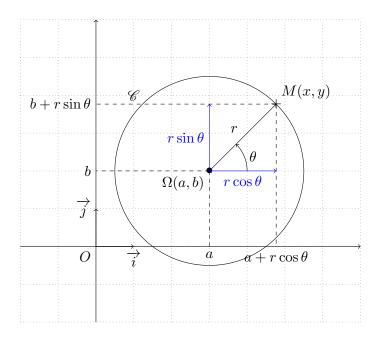
Démonstration.

5.3 Représentation paramétrique d'un cercle

On munit \mathscr{P} d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Proposition. Le cercle $\mathscr C$ de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon r>0 admet comme représentation paramétrique

$$\mathscr{C}: \left\{ \begin{array}{ll} x & = & a+r\cos\theta \\ y & = & b+r\sin\theta \end{array} \right., \; \theta \in \mathbb{R}.$$

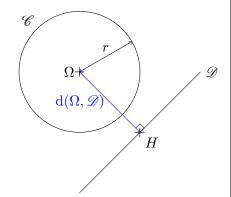


5.4 Intersection d'un cercle et d'une droite

Proposition. Soient $\Omega \in \mathscr{P}$ et r > 0. On appelle \mathscr{C} le cercle de centre Ω et de rayon r. Soit \mathscr{D} une droite de \mathscr{P} .

Si $d(\Omega, \mathcal{D}) > r$, alors

 $\mathscr{C} \cap \mathscr{D} = \emptyset$.



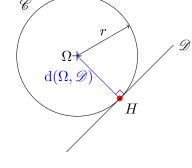
Si $d(\Omega, \mathcal{D}) = r$, alors

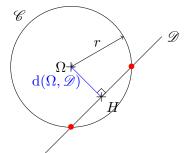
$$\mathscr{C}\cap\mathscr{D}=\left\{ H\right\} ,$$

où H est le projeté orthogonal de Ω sur \mathscr{D} .

Si $d(\Omega, \mathcal{D}) < r$, alors

 $\mathscr{C}\cap\mathscr{D}$ est une paire de points.

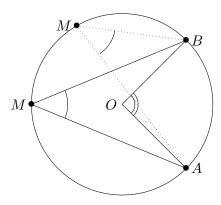




5.5 Cercles et angles

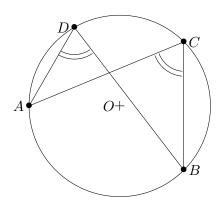
Proposition. Si A, B et M sont trois points d'un cercle de centre O tels que $M \neq A$ et $M \neq B$, alors :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \, [2\pi] \, .$$



Théorème. Quatre points disctincts A,B,C,D sont cocycliques ou alignés si et seulement si

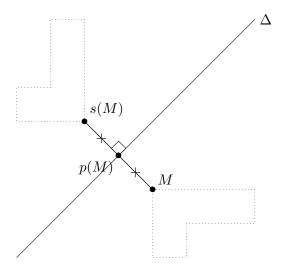
$$(\widehat{\overrightarrow{CA}}, \widehat{\overrightarrow{CB}}) = (\widehat{\overrightarrow{DA}}, \widehat{\overrightarrow{DB}}) \, [\pi]$$



6 Projection et réflexion

Définition. Soit Δ une droite de \mathscr{P} . On appelle **réflexion d'axe** Δ la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ .

Point de vue géométrique



Point de vue analytique - Identification du plan avec \mathbb{R}^2 .

Soient A=(0,1) un point et $\overrightarrow{u}=(1,1)$ un vecteur. On note Δ la droite passant par A et dirigée par \overrightarrow{u} . On note s la réflexion d'axe Δ .

Soit $M=(x_M,y_M)$ un point. On note $M'=(x_{M'},y_{M'})$ l'image du point M par s.

- 1. Déterminer une équation de la droite $\mathscr{D},$ perpendiculaire à Δ passant par M.
- 2. Déterminer les coordonnées de H, projeté orthogonal de M sur Δ .
- 3. En remarquant que H est le milieu du segment [MM'], déterminer les coordonnées de M', en fonction de celles de M et des données de l'énoncé. En déduire une expression analytique de s.