Chapitre 9 : Fonction d'une variable réelle à valeurs réelles

1 Généralités

1.1 Fonctions

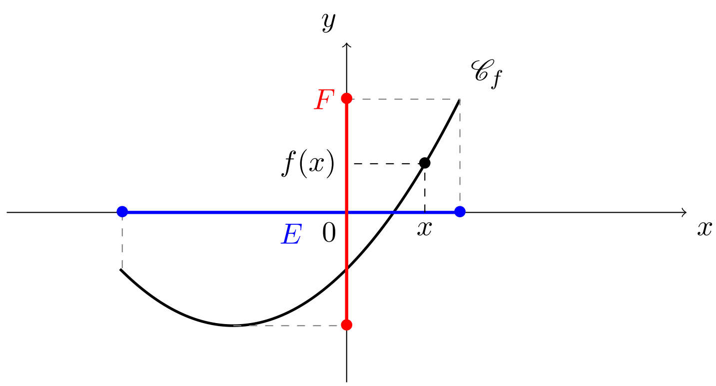
Définition. Une **fonction** ou **application**, notée f, est une relation entre deux ensembles E et F qui associe à chaque élément x du premier ensemble E (**ensemble de départ**) un unique élément du second ensemble F (**ensemble d'arrivée**), noté $f(x)$:

$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

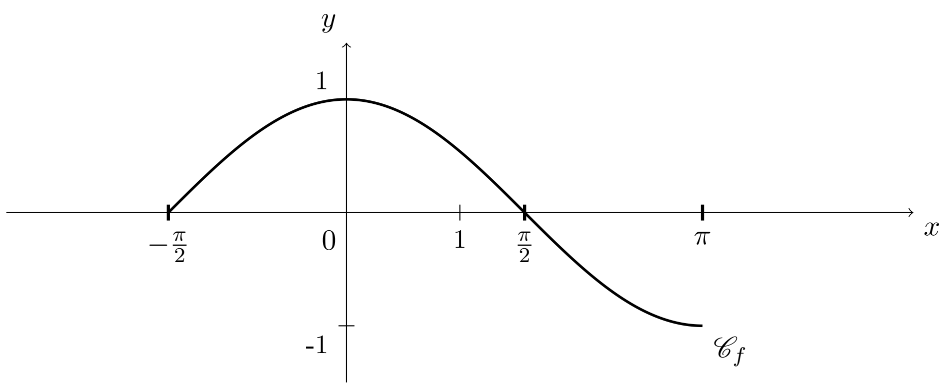
On parle aussi de **fonction définie sur** E **à valeurs dans** F.
Soient $x \in E$ et $y \in F$ tels que

$$f(x) = y.$$

Alors x est un **antécédent** de y par f et y est l'**image** de x par f.



Exercice 1.



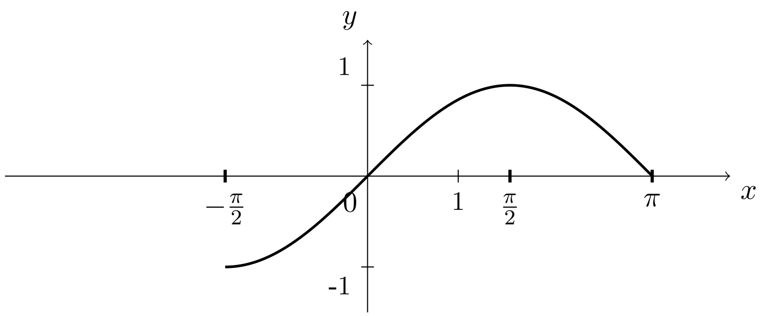
1. Définir f.
2. Déterminer les antécédents de 0 par la fonction f.
3. Déterminer l'image de 0 par f.

Définition. Soit A une partie de E. On peut alors considérer la **restriction de la fonction f à A**, notée $f|_A$, en posant :

$$f|_A \ : \ \begin{array}{ccc} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

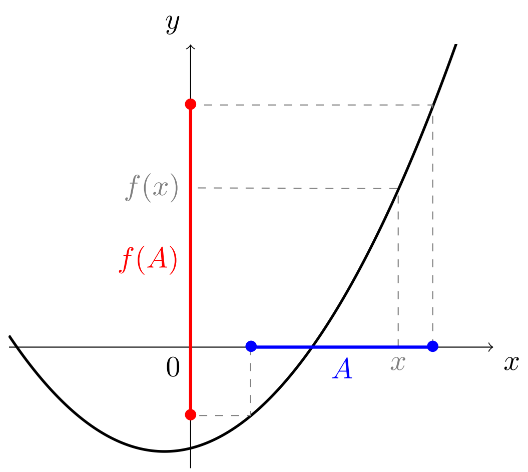
On dit aussi que f est un **prolongement de $f|_A$**.

Exemple. Représentation graphique de $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\pi]}$:



Définition. (Image d'une partie de E par f) Soit $A \subset E$. On note $f(A)$ l'ensemble défini par :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

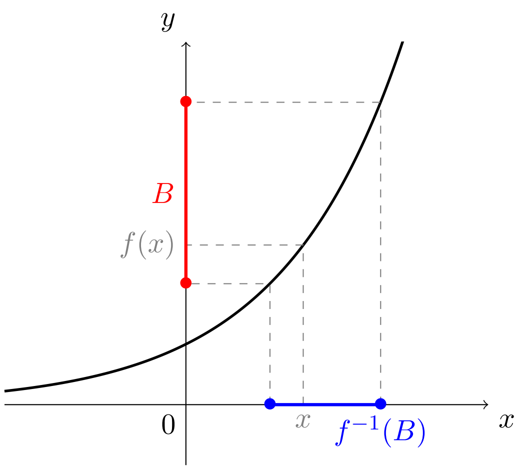


Exercice 2. Déterminer les images directes suivantes :

$$\cos\left(\left[0, \tfrac{\pi}{2}\right[\right), \quad \ln([1, \mathrm{e}[) \quad \text{et} \quad \exp(\mathbb{R}).$$

Définition. (Image réciproque d'une partie de F par f) Soit $B \subset F$. On note $f^{-1}(B)$ l'ensemble défini par

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$



Exercice 3. Déterminer les images réciproques suivantes :

$$\sin^{-1}(\{0\}), \quad \exp^{-1}([1, 2[) \quad \text{et} \quad \ln^{-1}(\mathbb{R}^+).$$

Dans ce chapitre, on s'intéresse au cas où E et F sont des parties de $\mathbb{R}$. On parle alors de fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles.

Définition. On note $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Opérations dans $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$

Définition. Soient $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_f & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_g & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x) \end{array}$.

On peut définir sur $\mathscr{D} = \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$ la **somme** et le **produit** de ces deux fonctions :

$$f+g : \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array} \quad \text{et} \quad f\cdot g : \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)\cdot g(x) \end{array}.$$

En posant $\mathscr{D}_{g\circ f} = \{x \in \mathscr{D}_f,\ f(x) \in \mathscr{D}_g\}$, on peut définir la **composée** $g \circ f$ de la façon suivante :

$$g\circ f : \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_{g\circ f} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}.$$

Méthodologie : Domaine de définition de $g \circ f$.

Exemple. $g(x) = \mathrm{e}^x$ et $f(x) = \ln(x)$.

Pour déterminer le domaine de définition de la fonction $g \circ f$, noté $\mathscr{D}_{g\circ f}$, on procède de la façon suivante :

On détermine $\mathscr{D}_f$ le domaine de définition de f.

Ici $\mathscr{D}_f =]0,+\infty[$.

On détermine l'expression de $g \circ f(x)$.

Ici $g\circ f(x) = g(f(x)) = \exp(\ln(x)) = x$. Donc $g \circ f(x) = x$.

On note I l'ensemble des valeurs x pour lesquelles cette expression est définie.

Ici $x \mapsto x$ est définie sur $\mathbb{R}$ donc $I = \mathbb{R}$

Enfin $\mathscr{D}_{g\circ f} = I \cap \mathscr{D}_f$.

On conclut que $\mathscr{D}_{gof} = \mathbb{R}\cap]0,+\infty[=]0,+\infty[$.

Exercice 4. Soient f et g deux fonctions telles que

$$f(x) = x^2 \text{ et } g(x) = \sqrt{1-x}.$$

Déterminer les domaines de définition, ainsi que les expressions des fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$.

1.2 Représentation graphique

Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni d'un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $f \ : \ \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$.

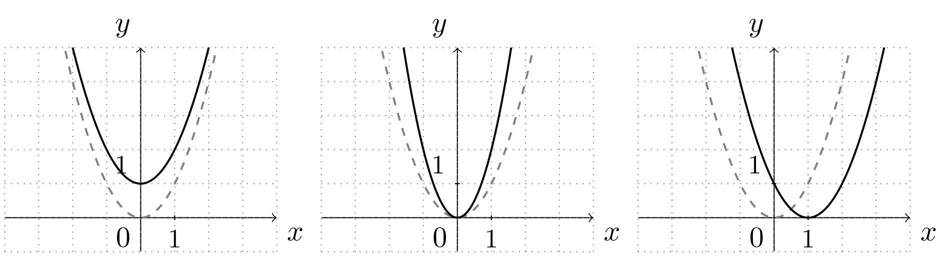
Définition. On appelle **courbe représentative** (ou **graphe**) de f, et on note $\mathscr{C}_f$, l'ensemble :

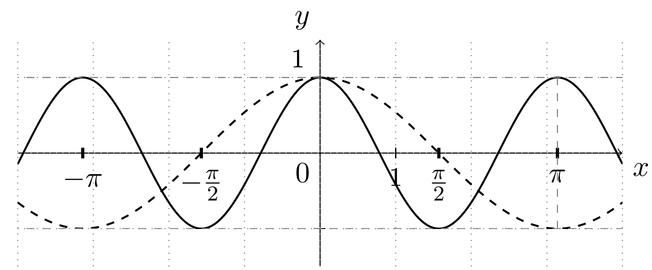
$$\begin{aligned} \mathscr{C}_f &= \{(x, y) \in \mathscr{D}_f \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\} \\ &= \{(x, f(x)) \mid x \in \mathscr{D}_f\} . \end{aligned}$$

Soit $a \in \mathbb{R}^\star$.

1. Le graphe de la fonction $x \to f(x) + a$ est obtenu en translatant $\mathscr{C}_f$ par le vecteur $a\vec{\jmath}$.
2. Le graphe de la fonction $x \to f(x - a)$ est obtenu en translatant $\mathscr{C}_f$ par le vecteur $a\vec{\imath}$.
3. Le graphe de la fonction $x \to f(ax)$ est obtenu en « dilatant » $\mathscr{C}_f$ le long du vecteur $\vec{\imath}$ d'un facteur $\frac{1}{a}$, c'est-à-dire en multipliant les valeurs en abscisse par $\frac{1}{a}$.
4. Le graphe de la fonction $x \to af(x)$ est obtenu en « dilatant » $\mathscr{C}_f$ le long du vecteur $\vec{\jmath}$ d'un facteur a, c'est-à-dire en multipliant les valeurs en ordonnée par a.

Exercice 5. Proposer une expression explicite pour chacune des fonctions représentées ci-dessous :





1.3 Parité et périodicité

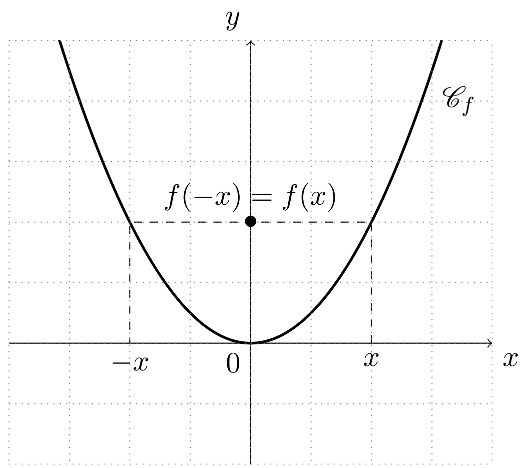
Définition. (Fonction paire - impaire) La fonction f est dite **paire** si et seulement si

$$\begin{cases} \mathscr{D}_f \text{ est symétrique par rapport à } 0 \\ \forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(-x) = f(x) \end{cases}.$$

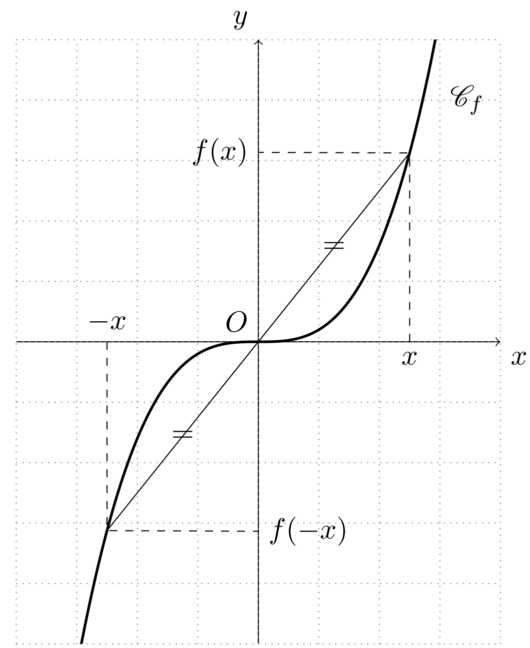
La fonction f est dite **impaire** si et seulement si

$$\begin{cases} \mathscr{D}_f \text{ est symétrique par rapport à } 0 \\ \forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(-x) = -f(x) \end{cases}.$$

Remarque. La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (Oy). Celle d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine O du repère.



Graphe d'une fonction paire



Graphe d'une fonction impaire

Exercice 6. Montrer que la fonction f définie par

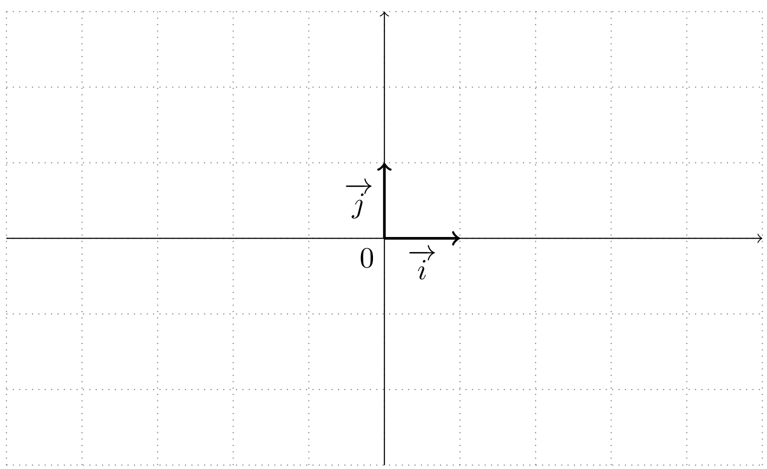
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

est une fontion impaire.

Définition. (Fonction périodique) Soit $T \in \mathbb{R}^\star$.
La fonction f est dite périodique de période T ou T-périodique si et seulement si
$$\begin{cases} \forall x \in \mathscr{D}_f, \quad x - T \in \mathscr{D}_f \text{ et } x + T \in \mathscr{D}_f, \\ \forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x+T) = f(x) \end{cases}.$$

Remarque. La courbe représentative d'une fonction T-périodique est invariante par la translation de vecteur $T\vec{i}$.

Exercice 7. On note f la fonction paire et 2-périodique telle que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = 2x$. Tracer la courbe représentative de la fonction f.



Exercice 8. Montrer que la fonction $f : x \to \cos(\frac{1}{2}x)$ est 4π-périodique.

1.4 Variations, extrema

Monotonie

Définition. La fonction f est dite **croissante** (resp. **strictement croissante**) sur l'intervalle I si et seulement si

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \quad x_1 \leqslant x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

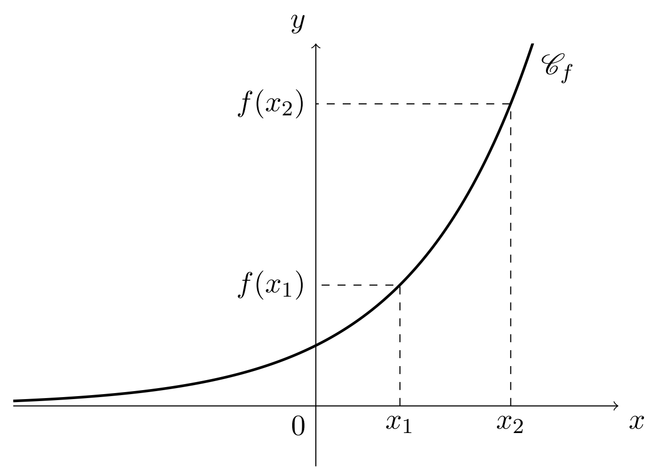
$$(\text{resp. } x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)).$$

La fonction f est dite **décroissante** (resp. **strictement décroissante**) sur l'intervalle I si et seulement si

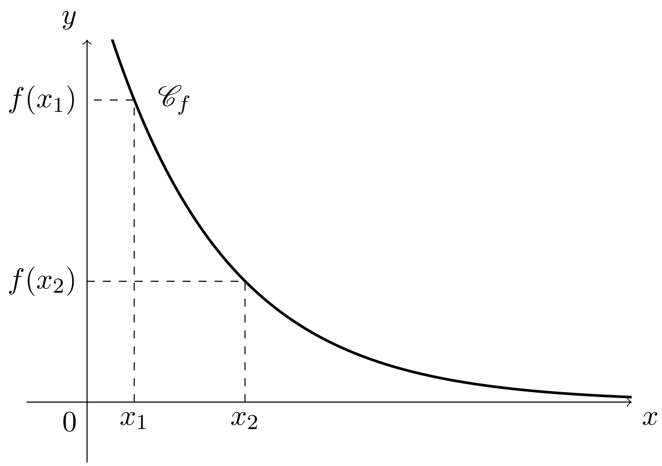
$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \quad x_1 \leqslant x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$$

$$(\text{resp. } x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)).$$

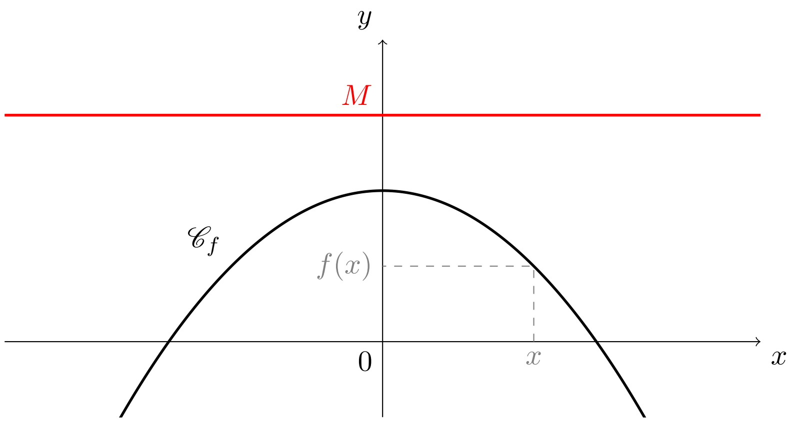
La fonction f est dite **monotone** sur I si elle est soit croissante sur I soit décroissante sur I. On définit de manière similaire une fonction **strictement monotone** sur I.



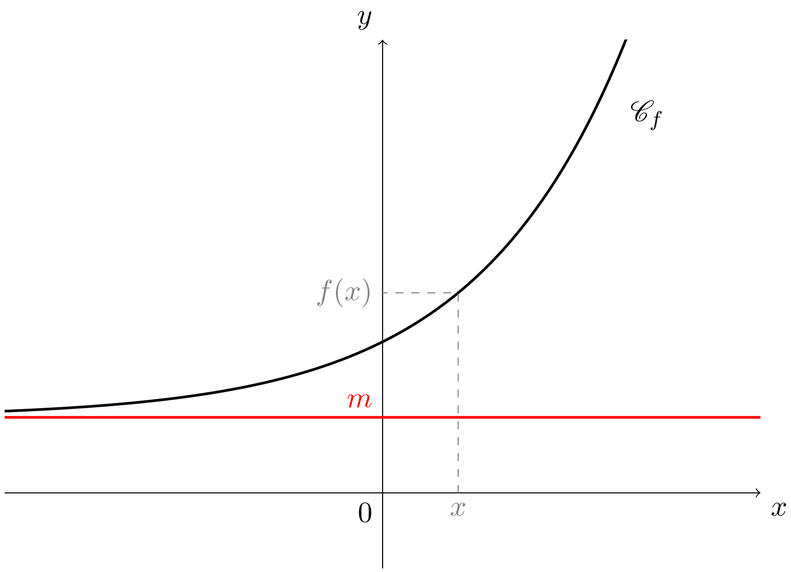
Graphe d'une fonction croissante



Graphe d'une fonction décroissante



Graphe d'une fonction majorée



Graphe d'une fonction minorée

Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition. La fonction f est dite **majorée** si et seulement si

$$\text{il existe } M \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) \leqslant M.$$

La fonction f est dite **minorée** si et seulement si

$$\text{il existe } m \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) \geqslant m.$$

La fonction f est dite **bornée** si et seulement si elle est à la fois minorée et majorée.

Proposition. Une fonction f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

Extrema

On appelle **voisinage de** x_0 tout intervalle ouvert contenant x_0.

Définition. On dit que f admet un **maximum** $f(x_0)$ en x_0 si et seulement si

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) \leqslant f(x_0).$$

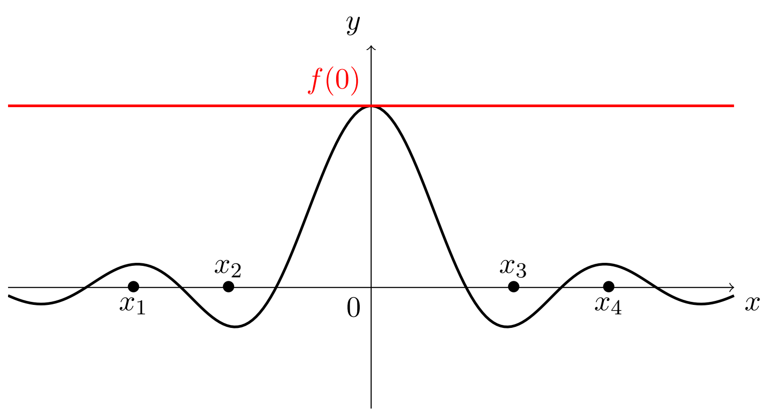
On dit que f admet un **minimum** $f(x_0)$ en x_0 si et seulement si

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) \geqslant f(x_0).$$

On dit que f admet un **maximum local** (resp. **minimum local**) $f(x_0)$ en x_0 si et seulement si

$$\text{il existe } V \text{ un voisinage de } x_0 \text{ tel que pour tout } x \in V, \quad f(x) \leqslant f(x_0) \quad (\text{ resp. } f(x) \geqslant f(x_0)).$$

On appelle **extremum** (local) un maximum ou un minimum (local).



f admet un maximum global en 0 et un maximum local en x_4

Exercice 9. À l'aide d'un tableau de variations, déterminer les extrema de la fonction $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1.5 Injection, surjection et bijection

Soient $I, J \subset \mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(I, J)$.

Définition. (f injective) f est une **injection** (ou est dite **injective**) si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2,\ f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

Définition. (f surjective) f est une **surjection** (ou est dite **surjective**)

si et seulement si tout élément de J admet un antécédent par f,

si et seulement si $\forall y \in J,\ \exists\, x \in I,\ y = f(x)$.

Définition. (f bijective) f est une **bijection** de I sur J (ou est dite **bijective**)

si et seulement si f est à la fois une injection et une surjection,

si et seulement si tout élément de J admet un unique antécédent par f,

si et seulement si $\forall y \in J,\ \exists!\, x \in I,\ y = f(x)$.

La fonction qui à $y \in J$ associe l'unique élément $x \in I$, tel que $y = f(x)$, est appelée **bijection réciproque de** f et notée f^{-1} :

$$f^{-1} : \begin{array}{ccl} J & \to & I \\ y & \mapsto & x \text{ tel que } y = f(x) \end{array}.$$

Proposition. Soit $f \in \mathscr{F}(I, J)$ une bijection.

- $\forall x \in I,\ \forall y \in J,$
$$f(x) = y \iff x = f^{-1}(y).$$
- $\forall x \in I,$
$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x.$$
- $\forall y \in J,$
$$f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = y.$$
- $\forall (x_1, x_2) \in I^2,$
$$f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2.$$

En pratique (et pour le moment), on utilisera le résultat suivant pour démontrer qu'une fonction est une bijection :

Théorème. (Théorème de la bijection)
Si f est une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle $[a, b]$, alors f est une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$.

Si f est une fonction continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[a, b]$, alors f est une bijection de $[a, b]$ sur $[f(b), f(a)]$.

Ce théorème se généralise à des intervalles ouverts et semi-ouverts :

I	f strictement croissante	f strictement décroissante
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$[a, b[$	$\left[f(a), \lim\limits_{b} f\right[$	$\left]\lim\limits_{b} f, f(a)\right]$
$]a, b]$	$\left]\lim\limits_{a} f, f(b)\right]$	$\left[f(b), \lim\limits_{a} f\right[$
$]a, b[$	$\left]\lim\limits_{a} f, \lim\limits_{b} f\right[$	$\left]\lim\limits_{b} f, \lim\limits_{a} f\right[$

Exercice 10. Montrer que $f : \begin{array}{ccc} [1,2] & \to & [1,4] \\ x & \mapsto & 3x-2 \end{array}$ est bijective.

Déterminer f^{-1}.

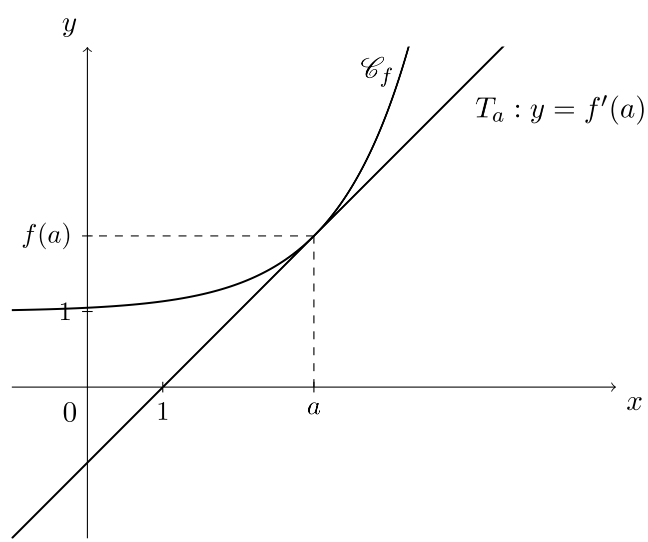
2 Dérivation

Définition. f **est dérivable en** a si et seulement si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie lorsque x tend vers a, Dans ce cas, le **nombre dérivé de** f **en** a est

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ **au point d'abscisse** a :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$



Dérivées des fonctions usuelles (cf chapitre 4)

Dérivées et opérations (cf chapitre 4)

Rappel : Dérivée d'une composée

Soient u et f deux fonctions réelles dérivables.
On note D le domaine de dérivabilité de la fonction $f \circ u$. On a :

$$\forall x \in D, \quad (f \circ u)'(x) = u'(x) \times f'(u(x)).$$

Exercice 11. Déterminer la dérivée de la fonction $\varphi : x \to \tan(x^2+1)$ (sans se soucier du domaine de dérivabilité).

Sens de variation

Théorème. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

f est constante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) = 0.$

f est croissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0.$

f est décroissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0.$

f est strictement croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geqslant 0$ sur I et la dérivée f' ne s'annule sur aucun intervalle non trivial.

f est strictement décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leqslant 0$ sur I et la dérivée f' ne s'annule sur aucun intervalle non trivial.

Exemple. La fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Dérivée d'une fonction réciproque

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ une fonction continue et strictement monotone sur I. On sait (théorème de la bijection) que $f(I)$ est un intervalle, que l'on note J, et que f réalise une bijection de I sur J.

Théorème. Alors :

- la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est strictement monotone et de même sens de variation que f,

- les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (**la première bissectrice**)

- Si f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et pour tout $x \in J$,

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.}$$

Exercice 12. Déterminer la dérivée de $f : x \mapsto \sqrt[3]{x}$.

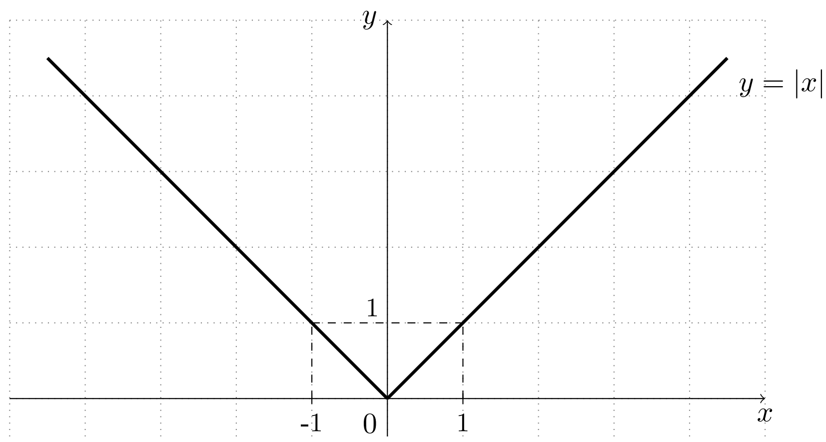
3 Fonctions usuelles

3.1 Valeur absolue

Définition. La valeur absolue d'un nombre réel est sa valeur numérique sans tenir compte de son signe.
Pour tout nombre réel x, la **valeur absolue** de x, notée $|x|$, est définie par :

$$\begin{cases} |x| = x, & \text{si } x > 0 \\ |x| = -x, & \text{si } x < 0 \\ |x| = 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Remarque. $|x| = \max(x, -x)$.



3.2 Partie entière

Définition. La partie entière d'un réel x, notée $\lfloor x \rfloor$, est l'unique entier relatif n tel que

$$n \leqslant x < n + 1.$$

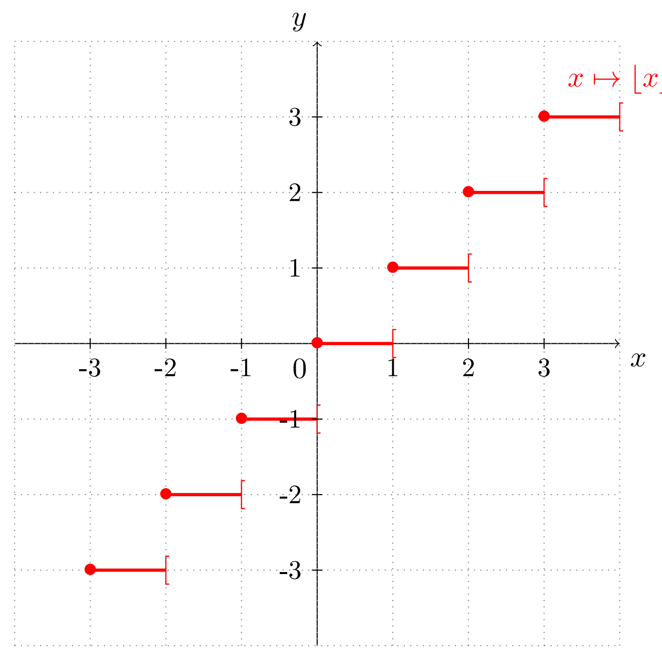
Exemple. $\lfloor \pi \rfloor = 3$ et $\lfloor -0.5 \rfloor = -1$.

Proposition. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$$

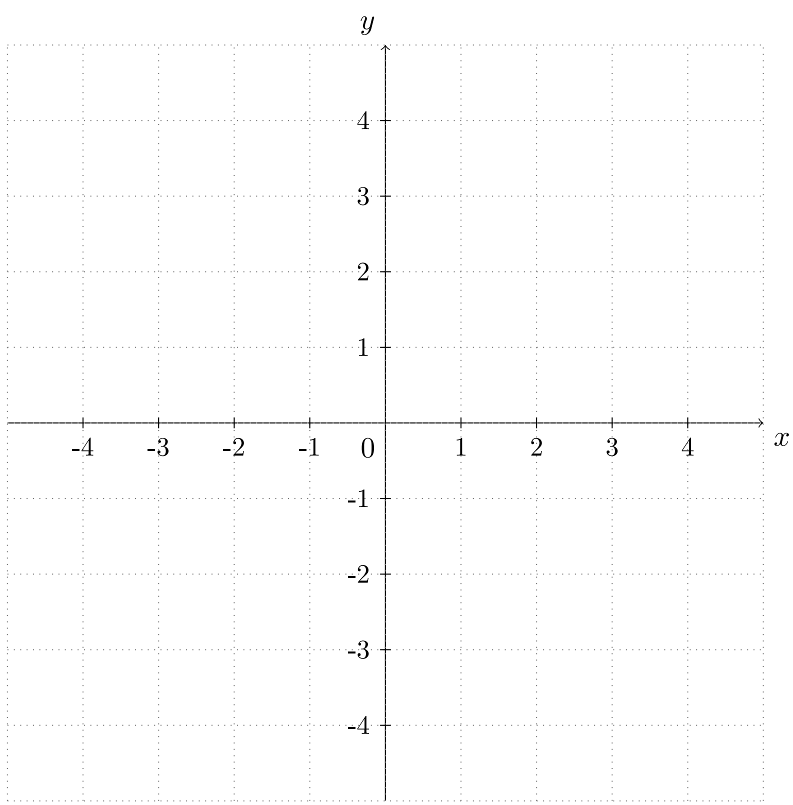
et

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$



C'est une fonction continue par morceaux.

Exercice 13. Représentation graphique de la fonction $x \mapsto \lfloor 2x+1 \rfloor$.



3.3 Fonctions exponentielle, logarithme népérien et puissances

Se référer au chapitre 3.

3.4 Fonctions circulaires et circulaires réciproques

Se référer au chapitre 3 pour les fonctions circulaires.

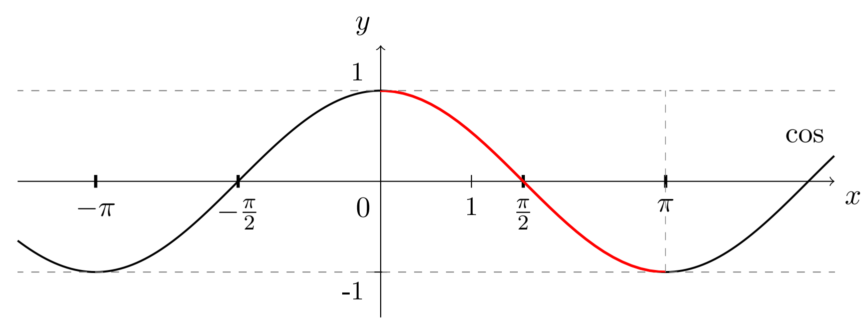
A. Arccosinus

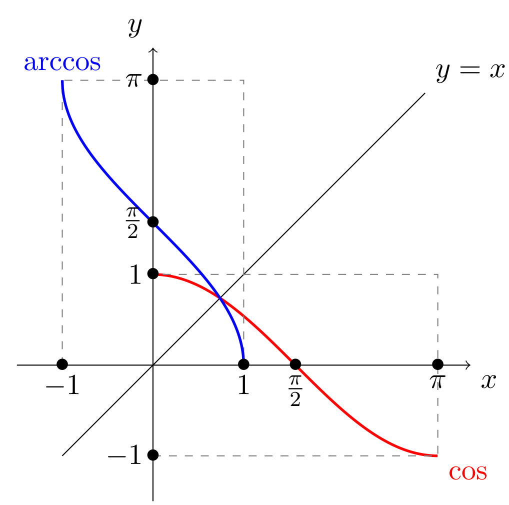
Considérons la fonction cosinus définie sur $\mathbb{R}$. Pour obtenir une bijection de cette fonction, il faut considérer la restriction de cosinus à l'intervalle $[0,\pi]$. Sur cette intervalle, la fonction cosinus est continue et strictement décroissante, donc la restriction

$$\cos_{|[0,\pi]} : [0,\pi] \to [-1,1]$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction **arccosinus** :

$$\arccos\ :\ [-1,1] \to [0,\pi].$$





On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \cos\left(\arccos(x)\right) = x & \forall x \in [-1, 1] \\ \arccos\left(\cos(x)\right) = x & \forall x \in [0, \pi] \end{array}}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\text{Si } x \in [0, \pi] \quad \cos(x) = y \iff x = \arccos(y).}$$

Dérivée de arccos :

$$\boxed{\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1, 1[.}$$

Démonstration.

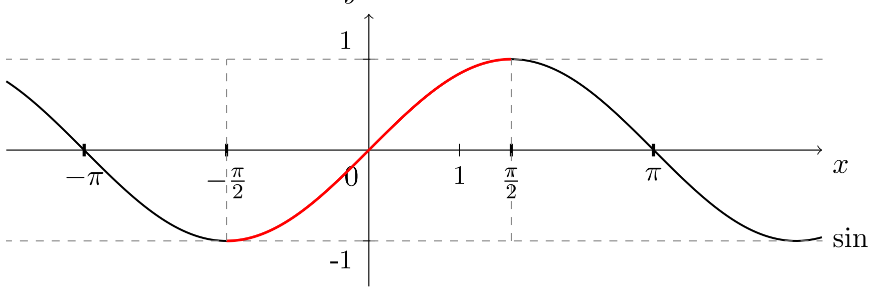
B. Arcsinus

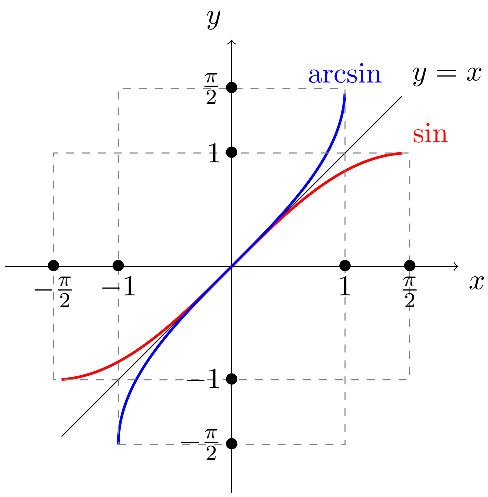
La restriction

$$\sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction **arcsinus** :

$$\arcsin\,:\,[-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$





On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin(\arcsin(x)) = x & \forall x \in [-1,1] \\ \arcsin(\sin(x)) = x & \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{array}}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\text{Si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \sin(x) = y \iff x = \arcsin(y).}$$

Dérivée de arcsin :

$$\boxed{\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1,1[.}$$

Démonstration.

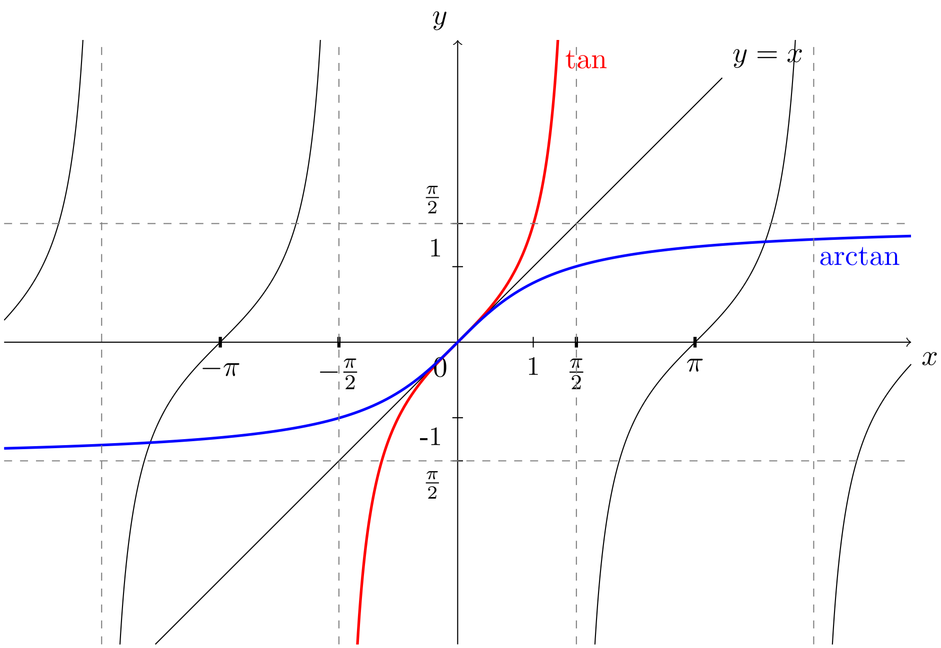
C. Arctangente

La restriction

$$\tan|_{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[} : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \left]-\infty, +\infty\right[$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction **arctangente** :

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$



On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \tan(\arctan(x)) & \forall x \in \mathbb{R} \\ \arctan(\tan(x)) = x & \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{array}}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\text{Si } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad \tan(x) = y \iff x = \arctan(y).}$$

Dérivée de arctan :

$$\boxed{\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.}$$

Démonstration.