

Vacances de la Toussaint Guide mathématique

1 Sommes

À mémoriser

Pour tout entier naturel n , on a

1.

$$\sum_{k=0}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^n a_k + \sum_{k=0}^n b_k$$

2.

$$\sum_{k=0}^n \lambda a_k = \lambda \sum_{k=0}^n a_k$$

3.

$$\sum_{k=D}^F 1 = F - D + 1$$

avec F et D des entiers naturels vérifiant $D \leq F$

4.

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

5.

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

6. Si $q \neq 1$, alors

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

S'exercer

Exercice 1. Écrire sans symbole :

1. $A = \sum_{k=0}^5 k^2$

2. $B = \prod_{k=1}^{10} \frac{k}{k+1}$

3. $C = \sum_{k=0}^3 \frac{k^2}{k+1}$

4. $D = \prod_{k=0}^5 \frac{1}{k+1}$

Exercice 2. Écrire les expressions suivantes avec \sum :

1. $A = 50 + 51 + \dots + 99 + 100$

2. $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{49} + \frac{1}{50}$

3. $C = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \dots + 121$

$$4. D = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{99}{100} + \frac{100}{101}$$

Exercice 3. À l'aide d'un changement d'indice, calculer :

$$1. A = \sum_{k=0}^{11} (e^{k+1} - e^k)$$

$$2. B = \sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k} \right)$$

$$3. C = \sum_{k=1}^{99} \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$$

$$4. D = \sum_{k=0}^n ((k+1)^2 - k^2)$$

$$5. E = \sum_{k=1}^{n+1} 2^{k-1}$$

$$6. F = \sum_{k=1}^{10} (k! - (k-1)!)$$

Exercice 4. Retrouvaille l'exercice 3 du TD5 (auto-correction possible avec le corrigé en ligne).

TD5.pdf

TD4correction.pdf

2 Produits

À mémoriser

Pour tout entier naturel n , on a

1.

$$\prod_{k=0}^n (a_k \times b_k) = \prod_{k=0}^n a_k \times \prod_{k=0}^n b_k$$

2.

$$\prod_{k=0}^n \left(\frac{a_k}{b_k} \right) = \frac{\prod_{k=0}^n a_k}{\prod_{k=0}^n b_k}$$

3.

$$\prod_{k=0}^n (a_k)^\alpha = \left(\prod_{k=0}^n a_k \right)^\alpha$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

4.

$$\prod_{k=D}^F \lambda = \lambda^{F-D+1}$$

avec F et D des entiers naturels vérifiant $D \leq F$

5.

$$\prod_{k=1}^n k = n!$$

6.

$$(n+1)! = (n+1) \times n!$$

S'exercer

Exercice 5. Calculer les produits suivants :

$$1. \prod_{k=1}^n (2k)$$

$$2. \prod_{k=1}^n 3n^2$$

$$3. \prod_{k=0}^n e^k$$

$$4. \prod_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k-1}$$

$$5. \prod_{k=1}^n 2 \left(1 + \frac{1}{k} \right)$$

$$6. \prod_{k=2}^n \frac{k^2-1}{k}$$

3 Factorielles et coefficients binomiaux

À mémoriser

1. Définition de la factorielle : si n est un entier naturel non nul, alors

$$n! = \prod_{k=1}^n k \quad \text{et} \quad 0! = 1.$$

2. Relation de récurrence : pour tout entier naturel n , on a

$$(n+1)! = (n+1) \times n!$$

3. Définition du coefficient binomial $\binom{n}{p}$:

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \frac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } 0 \leq p \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
5. Propriétés du coefficient binomial (symétrie, factorisation, formule de Pascal)
6. Formule du binôme de Newton : pour tout $a, b \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

S'exercer

Exercice 6. Développer *le plus rapidement possible* les expressions suivantes :

1. $A = (x+y)^4$
2. $B = (x-y)^3$
3. $C = (1+x)^6$

4. $D = (x-1)^3$
5. $E = (\sqrt{2}-1)^4$
6. $F = (1+2x)^3$

Exercice 7. Calculer/simplifier les expressions suivantes :

$$\frac{12!}{10!}; \frac{10!}{(6!)^2}; \frac{11!}{9! \times 2!}; \binom{10}{8}; \binom{15}{14}; \binom{13}{11};$$
$$\binom{n+1}{2}; \binom{n+1}{n}; \frac{(n+2)!}{(n+1)!}; \frac{(n+1)! \times (n-1)!}{(n!)^2}$$

4 Récurrences

Exercice 8. Retravailler les trois démonstrations au programme de khôlles n°6 :

$$\sum_{k=0}^n k, \sum_{k=0}^n k^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n q^n.$$

Exercice 9. Démontrer au choix l'une des deux propriétés suivantes par récurrence :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\prod_{k=0}^n (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$

5 Primitives

Exercice 10. Refaire la feuille d'AP Primitives plusieurs fois pendant les vacances, *le plus rapidement possible*.

APprimitives.pdf

Exercice 11. Refaire l'exercice 11 du TD4 (auto-correction possible avec le corrigé en ligne).

TD4.pdf

TD4correction.pdf