

AP - 05/12/2025

## Énoncés

**Exercice 1.** Étudier et représenter les fonctions suivantes :

1.  $f(x) = \exp(\sin(x)^2)$
2.  $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$
3.  $f(x) = xe^{1-2|x|}$

**Exercice 2.** Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$ .

1. Déterminer  $D_f$  et préciser les limites aux bornes de  $D_f$ .
2. Montrer que  $f'(x) = g(x) \times f(x)$  avec  $g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + \frac{1}{x-1}$ .
3. Étudier les variations de  $g$  et préciser les limites.
4. En déduire les variations de  $f$ .

**Exercice 3.** À l'aide d'un cercle trigonométrique, déterminer :

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \arcsin\left(\frac{1}{2}\right), \quad \arctan(-1), \quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

**Exercice 4.** 1. Montrer que

$$0 < \arccos\left(\frac{3}{4}\right) < \frac{\pi}{4}.$$

2. Résoudre

$$\arccos(x) = 2 \arccos\left(\frac{3}{4}\right).$$

**Exercice 5.** 1. Montrer que  $2 \arctan\left(\frac{1}{3}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

2. Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$\sin(2t) = \frac{2 \tan(t)}{1 + \tan^2(t)}.$$

3. En déduire que

$$\arcsin\left(\frac{3}{5}\right) = 2 \arctan\left(\frac{1}{3}\right).$$

**Exercice 6.** 1. Montrer que pour tout  $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\sin(x) = \frac{\tan(x)}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}} \quad \text{et} \quad \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}}.$$

2. Montrer que :  $\arctan\left(\frac{3}{4}\right) \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$  et  $\arctan\left(\frac{5}{12}\right) \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ .

Ainsi  $0 < \arctan\left(\frac{3}{4}\right) + \arctan\left(\frac{5}{12}\right) < \frac{\pi}{2}$ .

3. Résoudre  $\arcsin(x) = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) + \arctan\left(\frac{5}{12}\right)$ .

Indication : On rappelle que  $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$  pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .