AP du vendredi 22 mai
Intégration sur un segment

Intégration par parties

Exercice 1. (Intégrales de Wallis)

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$ et $I_n > 0$. (question traitée en classe)
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.

Sommes de Riemann et méthode des rectangles

Si f est une fonction continue de $[a,b]$ (où $a < b$) dans $\mathbb{R}$ alors

$$\boxed{\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Exercice 2. (Sommes de Riemann) Calculer les limites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{k}{n}}$.
2. $u_n = \dfrac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}$.
3. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2 + k^2}$.
4. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n^2 + k^2}$.

Formule de Taylor avec reste intégral

Soient f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I et $(a,x) \in I^2$. Alors :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,\mathrm{d}t.}$$

Exercice 3. Montrer que :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\arctan(x) \leqslant x$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $1 + x \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}\mathrm{e}^x$.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
6. Pour tout $x \in [0,\pi]$, $1 - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \cos(x) \leqslant 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!}$.