Colle 11 - Groupes 5 et 9
Lundi 09/12/2024 de 12h à 14h

Enoncés

1. On considère l'intégrale
$$I=\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$
En posant $u=\sqrt{t}$, montrer que I est convergente est calculer sa valeur.

2. On considère l'intégrale
$$I=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t.$$
En posant $u=\dfrac{1+\sin(x)}{2}$, montrer que I est convergente est calculer sa valeur.

3. On considère l'intégrale
$$I=\int_0^1 \frac{1}{\left(\mathrm{e}^t+1\right)\left(\mathrm{e}^{-t}+1\right)}\,\mathrm{d}t.$$
En posant $u=\mathrm{e}^t$, montrer que I est convergente est calculer sa valeur.

4. On considère les intégrales
$$I=\int_0^{\pi/2} \ln\left(\sin(t)\right)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J=\int_0^{\pi/2} \ln\left(\cos(t)\right)\,\mathrm{d}t.$$
On admet que l'intégrale I est convergente.
   (a) En utilisant le changement de varaibles $u=\pi/2-t$, montrer que J est convergente et que $I=J$.
   (b) Calculer $I+J$. En déduire la valeur de I et de J.

5. La matrice
$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Si oui, la diagonaliser.

6. Soit $m\in\mathbb{R}$. On considère
$$A_m=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}.$$
Pour quelles valeurs de $m\in\mathbb{R}$ la matrice A_m est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

7. Soit $m\in\mathbb{R}$. On considère
$$B_m=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ m^2-7m & m-7 & m \end{pmatrix}.$$
Pour quelles valeurs de $m\in\mathbb{R}$ la matrice B_m est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

8. Pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, on note P_n le polynôme caractéristique de
$$A_n=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

(a) Calculer P_1 et P_2.

(b) Déterminer une relation entre $P_{n+2}(x)$, $P_{n+1}(x)$ et $P_n(x)$ vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

(c) Montrer que pour tout $a \in]0, \pi[$, on a

$$P_n\left(2\cos(a)\right) = \frac{\sin\left((n+1)a\right)}{\sin\left(a\right)}.$$

(d) En déduire que P_n admet n racines distinctes et que A_n est diagonalisable.

9. On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par leur premier terme u_0, v_0, w_0 et les relations

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - w_n \end{cases} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3$ pour que les trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) convergent.

10. Soit $a \in \mathbb{C}$. On définit $\varphi \in \mathscr{L}\left(\mathbb{C}_2[X]\right)$ par

$$\varphi(P) = \left(X^2 - 1\right)P'' - (X - a)P'.$$

(a) Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme φ.

(b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le nombre a pour que l'endomorphisme φ soit diagonalisable.