# Devoir maison n°1 - Mathématiques

## Pour le mercredi 19 novembre

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2.

On note

$$Q(X) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k, \quad P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

1. Calculer $P_2, P_3, P_4$.
2. Calculer $S_2, S_3, S_4$.
3. En `Python`, écrire une fonction `P(n)` qui prend en argument un entier `n` supérieur ou égal à 2, et qui renvoie $P_n$.
4. En `Python`, écrire une fonction `S(n)` qui prend en argument un entier `n` supérieur ou égal à 2, et qui renvoie $S_n$.
5. En utilisant une formule du cours, donner une expression de $Q\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)$ sans symbole $\sum$ lorsque $\theta \neq 0[2\pi]$.
6. Pour $\varphi \in \mathbb{R}$, factoriser l'expression $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - 1$ par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}$.
7. En déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\, 2k\pi |\, k \in \mathbb{Z}\}$,

$$Q\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n-1)\theta}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

8. En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$S_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.$$

9. En `Python`, écrire une fonction `test(n)` qui renvoie `True` si $S_n = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$ et `False` sinon.
   La tester et commenter le résultat. Comment contourner le problème rencontré ?