Colle 24 - Groupes 4 et 8

Sujet 1

Exercice 1 On définit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/4}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. La fonction f admet-elle des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2 Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$3\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = f. \quad (E)$$

On pourra utiliser le changement de variables $(u,v) = (x+y, 2x+3y)$.

Exercice 3 Soit $f : T \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = xy(1-x-y)$$

avec $T = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant 1 \right\}$.

1. Justifier que f admet des extrema globaux sur T.
2. Déterminer les extrema de f.

. . . .

Sujet 2

Exercice 1 Soient $a, b > 0$. On définit l'application $f : (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \frac{x^a y^b}{x^2+y^2}.$$

Pour quelles valeurs de (a,b) la fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 2 Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = f. \quad (E)$$

Exercice 3 Soit $f : D \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = y^2 - x^2 y + x^2$$

avec $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 - 1 \leqslant y \leqslant 1 - x^2 \right\}$.

1. Justifier que f admet des extrema globaux sur D.
2. Déterminer les extrema de f.

. . . .

Sujet 3

Exercice 1 On définit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 - y^2)\ln\left(x^2+y^2\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + y^2. \quad (E)$$

Exercice 3 Soit $\mathscr{C}$ un cercle de rayon 1. Quel est le périmètre maximal d'un triangle dont les sommets sont sur $\mathscr{C}$.
Indication : Soient $z = e^{\mathbf{i}\alpha}$ et $z' = e^{\mathbf{i}\beta}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Montrer que $z' - z = 2\mathbf{i}\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)e^{\mathbf{i}\frac{\alpha+\beta}{2}}$. En déduire le module de $z'-z$.

. . . .

Exercices supplémentaires

Exercice 1 On définit l'application $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(M) = AM - MA \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Donner une base du noyau et de l'image de f.
3. Écrire la matrice de f dans la base canonique.

Exercice 2 Soit $n \geqslant 2$. On note $P_n(x)$ le polynôme caractéristique de la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Calculer $P_1(x)$ et $P_2(x)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P_{n+2}(x) = xP_{n+1}(x) - P_n(x)$.
3. Pour tout $x \in]-2,2[$, on écrit $x = 2\cos(\alpha)$ avec $\alpha \in]0,\pi[$. Montrer que
$$P_n(x) = \frac{\sin\left((n+1)\alpha\right)}{\sin(\alpha)}.$$
4. En déduire les valeurs propres de A_n. Est-elle diagonalisable ?

Exercice 3 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On considère

$$M = \begin{pmatrix} (-1)^X & 1 \\ (-1)^Y & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Quelle est la probabilité que M soit inversible ?
2. Quelle est la probabilité que 1 soit valeur propre de M ?
3. Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
4. Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable sur $\mathbb{C}$?