# Devoir maison n°1 - Mathématiques
## Correction

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2.

On note

$$Q(X) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k, \quad P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

1. Calculer $P_2, P_3, P_4$.
   On a

$$\begin{aligned} P_2 &= \prod_{k=1}^{1} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \\ P_3 &= \prod_{k=1}^{2} \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{4}, \\ P_4 &= \prod_{k=1}^{3} \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2. Calculer $S_2, S_3, S_4$.
   On a

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=1}^{1} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \\ S_3 &= \sum_{k=1}^{2} \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}, \\ S_4 &= \sum_{k=1}^{3} \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + 1. \end{aligned}$$

3. En `Python`, écrire une fonction `P(n)` qui prend en argument un entier `n` supérieur ou égal à 2, et qui renvoie $P_n$.
4. En `Python`, écrire une fonction `S(n)` qui prend en argument un entier `n` supérieur ou égal à 2, et qui renvoie $S_n$.
5. En utilisant une formule du cours, donner une expression de $Q\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)$ sans symbole $\sum$ lorsque $\theta \neq 0[2\pi]$.

On a

$$\begin{aligned} Q\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}\right)^{k} \\ &= \frac{\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}\right)^{n}-1}{\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}-1} && \text{car } \mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}\neq 1 \text{ (en effet } \theta\neq 0[2\pi]\text{)} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}n\theta}-1}{\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}-1}. && \text{(formule de Moivre)} \end{aligned}$$

Conclusion : $Q\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}\right)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}n\theta}-1}{\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}-1}$ lorsque $\theta\neq 0[2\pi]$.

6. Pour $\varphi\in\mathbb{R}$, factoriser l'expression $\mathrm{e}^{\mathbf{i}\varphi}-1$ par $\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\varphi}{2}}$.

   Soit $\varphi\in\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathbf{i}\varphi}-1 &= \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\varphi}{2}}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}\varphi}}{\mathrm{e}^{\mathbf{i}\varphi/2}}-\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathbf{i}\varphi/2}}\right) && \text{(factorisation)} \\ &= \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\varphi}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\varphi/2}-\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\varphi/2}\right) && \text{(propriété de } \mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}\text{)} \\ &= \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\varphi}{2}}\times 2\mathbf{i}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right). && \text{(formule d'Euler)} \end{aligned}$$

   Conclusion : Pour $\varphi\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{\mathbf{i}\varphi}-1=\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\varphi}{2}}\times 2\mathbf{i}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$.

7. En déduire que pour tout $\theta\in\mathbb{R}\setminus\{2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$,

$$Q\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}\right)=\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{(n-1)\theta}{2}}\frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

   Soit $\theta\in\mathbb{R}\setminus\{2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$. On a

$$\begin{aligned} Q\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}\right) &= \frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}n\theta}-1}{\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}-1} && \text{d'après Q5} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{n\theta}{2}}\times 2\mathbf{i}\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\theta}{2}}\times 2\mathbf{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} && \text{d'après Q6} \\ &= \mathrm{e}^{\mathbf{i}\left(\frac{n\theta}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}\frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} && \text{(simplification)} \\ &= \mathrm{e}^{\mathbf{i}(n-1)\frac{\theta}{2}}\frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}. && \text{(factorisation)} \end{aligned}$$

   Conclusion : Pour tout $\theta\in\mathbb{R}\setminus\{2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$ ,$Q\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}\right)=\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{(n-1)\theta}{2}}\frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

8. En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que pour tout entier $n\geqslant 2$,

$$S_n=\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

On a

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) && \text{(par définition)}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) && \text{(car } \sin(0)=0\text{)}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{k\pi}{n}}\right) && \text{(par définition de } \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{n}}\text{)}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Im}\left(\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{n}}\right)^k\right) && \text{(formule de Moivre)}\\
&= \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{n}}\right)^k\right) && \text{(linéarité de } \mathrm{Im}(z)\text{)}\\
&= \mathrm{Im}\left(Q\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{n}}\right)\right) && \text{(définition de Q(X))}\\
&= \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{(n-1)\frac{\pi}{n}}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n\frac{\pi}{n}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\frac{\pi}{n}}{2}\right)}\right) && \text{(d'après Q8)}\\
&= \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}\right)} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}\right)} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\right)\\
&= \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}\right) \times \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} && \text{(définition de } \mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}\text{)}\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) \times \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} && \text{(car } \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x)\text{)}\\
&= \frac{1}{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}}\\
&= \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.
\end{aligned}$$

Conclusion : pour tout entier $n \geqslant 2$, $S_n = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$.

9. En `Python`, écrire une fonction `test(n)` qui renvoie `True` si $S_n = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$ et `False` sinon.
   La tester et commenter le résultat. Comment contourner le problème rencontré ?

```python
from math import sin, pi, tan

def P(n):
    if n>=2:
        resu=1
        for k in range(1,n,1):
            resu=resu*sin(k*pi/n)
        return resu

def S(n):
    if n>=2:
        resu=0
        for k in range(1,n,1):
            resu=resu+sin(k*pi/n)
        return resu

def test(n):
    if n>=2:
        alpha=1/tan(pi/(2*n))
        return S(n)==alpha

def test1(n,eps):
    if n>=2:
        alpha=1/tan(pi/(2*n))
        return abs(S(n)-alpha)<eps

def test2(n):
    if n>=2:
        alpha=1/tan(pi/(2*n))
        return round(S(n),2)==round(alpha,2)

```

Les tests ne renvoient pas les résultats souhaités. Cet exemple met en avant la difficulté de tester des flottants en Python, qui sont stockés sous une forme binaire approchée (et pas de manière exacte). En effet, le simple test `0.1+0.2==0.3` renvoie `False`.

Alternative 1 : On peut introduire une « erreur acceptable ». La fonction `test1(n,eps)` renvoie `True` si $\left|S_n - \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\right| <$ eps, c'est-à-dire si l'erreur commise est inférieure à `eps`, et `False` sinon. Le test `test1(50,0.00001)` renvoie alors `True`.

Alternative 2 : On peut utiliser la fonction `round()` et effectuer un test à $10^{-2}$ près `round(S(n),2)==round(alpha,2)`.