Devoir maison n°2 - Mathématiques

Pour le vendredi 28 novembre

Exercice 1 : Racines septièmes de l'unité

On pose $u = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{7}}$, $S = u + u^2 + u^4$ et $T = u^3 + u^5 + u^6$.

1. Justifier que $\mathrm{Im}\,(S) > 0$.
2. Calculer $S + T$ et ST.
3. En déduire les valeurs de S et de T.

Exercice 2 : Une équation complexe menant aux valeurs exactes de la tangente

4. Expliciter $\mathbb{U}_5$.
5. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \neq \pi\,[2\pi]$, on a

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta} - 1}{\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta} + 1} = \mathbf{i}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

6. Résoudre

$$(1+z)^5 = (1-z)^5 \quad (E)$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
Indication : On effectuera le changement de variables $\omega = \dfrac{1+z}{1-z}$ *après avoir justifié sa bonne définition.*

7. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$(1+z)^5 = (1-z)^5 \iff z\left(z^4 + 10z^2 + 5\right) = 0.$$

8. Résoudre

$$z\left(z^4 + 10z^2 + 5\right) = 0 \quad \text{d'inconnue } z \in \mathbb{C}.$$

9. En déduire les valeurs exactes de $\tan\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ et de $\tan\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$, que l'on exprimera sous la forme

$$\sqrt{p + q\sqrt{n}} \quad \text{avec } n, p, q \text{ des entiers.}$$