

DM n°3

Équations différentielles & Géométrie élémentaire de l'espace

Exercice 1. On considère les équations différentielles suivantes :

$$xy' - (x + 1)y = 0 \quad (E_1)$$

et

$$xy'' - (5x + 1)y' + (6x + 2)y = 0 \quad (E_2)$$

sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

- Déterminer a et b des réels tels que pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$\frac{x + 1}{x} = a + \frac{b}{x}.$$

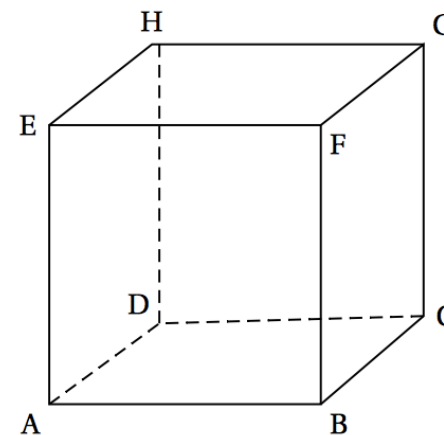
- Résoudre (E_1) sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on pose $\varphi(x) = e^{2x}$.
Montrer que φ est une solution de (E_2) sur $]0; +\infty[$.
- Soit $\mathbf{u}(x)$ une fonction deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$.
On pose, pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$\mathbf{v}(x) = \mathbf{u}(x)e^{2x}.$$

Montrer que $\mathbf{v}(x)$ est solution de (E_2) si et seulement si $\mathbf{u}'(x)$ est une solution de (E_1) .

- Résoudre (E_2) sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Exercice 2. On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1 représenté ci-dessous :



Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal

$$\mathcal{R} = (D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}).$$

On note K le point de l'espace tel que $\overrightarrow{FK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FD}$.

- Montrer que les coordonnées du point K dans \mathcal{R} sont $(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3})$.
- Montrer que les droites (EK) et (DF) sont orthogonales.
- Calculer la distance EK .

Soit M un point du segment $[HG]$. On note $m = HM$ (m est donc un réel appartenant à $[0; 1]$).

9. Montrer que, pour tout m appartenant à l'intervalle $[0; 1]$, le volume du tétraèdre $EMFD$, en unité de volume, est égal à $\frac{1}{6}$.
10. Déterminer une équation cartésienne du plan (MFD) .
11. On note d_m la distance du point E au plan (MFD) . Montrer que pour tout $m \in [0; 1]$,
$$d_m = \frac{1}{\sqrt{2m^2 - 2m + 2}}.$$
12. Déterminer la position de M sur le segment $[HG]$ pour laquelle la distance d_m est maximale.
13. En déduire que lorsque la distance d_m est maximale, le point K est le projeté orthogonal de E sur le plan (MFD) .

On note \mathcal{S} la sphère de centre M et de rayon $r = \sqrt{2}$.

14. Déterminer une équation cartésienne de \mathcal{S} .
15. On note M' le projeté orthogonal du point M sur le plan (AFG) . Déterminer les coordonnées du point M' .
16. Montrer que quel que soit $m \in [0; 1]$, M' appartient à une droite dont on déterminera un système d'équations cartésiennes.
17. Déterminer l'intersection $(AFG) \cap \mathcal{S}$.
18. Déterminer l'intersection $(HG) \cap \mathcal{S}$.

Exercice 3. On munit \mathcal{E} d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note \mathcal{D} la droite passant par O et dirigée par $\vec{u} = (1, 1, 1)$ et \mathcal{Q} le plan d'équation : $y + z = 0$. On considère la famille de plans

$$\mathcal{P}_m : x + my - mz = 1,$$

où $m \in \mathbb{R}$.

19. Montrer que quel que soit le réel m , la droite \mathcal{D} n'est jamais perpendiculaire au plan \mathcal{P}_m .
20. Soit $m \in \mathbb{R}$ fixé. Déterminer une équation cartésienne du plan \mathcal{R}_m contenant \mathcal{D} et perpendiculaire à \mathcal{P}_m .

21. Montrer que pour tout réel m , l'intersection des plans \mathcal{P}_m , \mathcal{R}_m et \mathcal{Q} est un point I_m dont on déterminera les coordonnées dans \mathcal{R} .
22. On note \mathcal{S} l'ensemble d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = x$. Montrer que \mathcal{S} est une sphère dont on déterminera les coordonnées du centre, ainsi que son rayon.
23. Montrer que l'intersection de \mathcal{S} et de \mathcal{Q} est un cercle \mathcal{C} dont on déterminera le centre et le rayon.
24. Montrer que quel que soit le réel m , I_m appartient à \mathcal{C} .