DM n°3

Équations différentielles & Géométrie élémentaire de l'espace

Exercice 1. On considère les équations différentielles suivantes :

$$xy' - (x+1)y = 0 \quad (E_1)$$

et

$$xy'' - (5x+1)y' + (6x+2)y = 0 \quad (E_2)$$

sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

1. Déterminer a et b des réels tels que pour tout $x \in]0;+\infty[$,

$$\frac{x+1}{x} = a + \frac{b}{x}.$$

Correction. Pour tout $x > 0$,

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x}.$$

Alternative : On a

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{x} = a + \frac{b}{x} \quad \forall x > 0 &\iff x+1 = ax+b \quad \forall x>0 \\ &\iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \quad \text{par identification.}\end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $\dfrac{x+1}{x} = 1 + \dfrac{1}{x}$.

2. Résoudre (E_1) sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Correction. On a

$$\begin{aligned}xy' - (x+1)y = 0 \text{ sur }]0;+\infty[&\iff y' - \frac{x+1}{x}y = 0 \text{ sur }]0;+\infty[\\ &\iff y' - \left(1 + \frac{1}{x}\right)y = 0 \text{ sur }]0;+\infty[.\end{aligned}$$

Ici $a(x) = -\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$. On pose $A(x) = -x - \ln(|x|)$.
On a $y(x) = y_H(x) = C\mathrm{e}^{-A(x)} = C\mathrm{e}^{x+\ln(x)} = C\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\ln(x)} = Cx\mathrm{e}^x$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Conclusion : $\mathscr{S}_{(E_1)} = \left\{ \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Cx\mathrm{e}^x \end{array}, \quad C \in \mathbb{R} \right\}$.

3. Pour tout $x \in]0;+\infty[$, on pose $\varphi(x) = \mathrm{e}^{2x}$.
Montrer que φ est une solution de (E_2) sur $]0;+\infty[$.

Correction. Pour tout $x \in]0;+\infty[$,

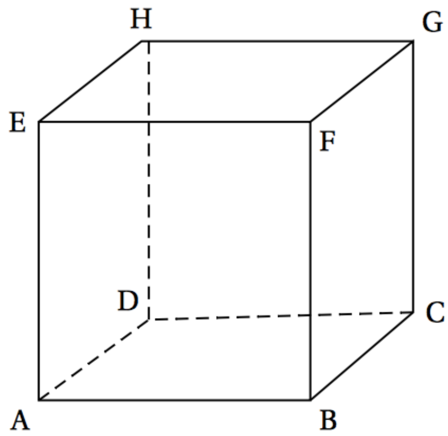
$$\begin{aligned}
x\varphi''(x) - (5x+1)\varphi'(x) + (6x+2)\varphi(x) &= 4x\mathrm{e}^{2x} - (5x+1)\times 2\mathrm{e}^{2x} + (6x+2)\mathrm{e}^{2x} \\
&= (4x - 2(5x+1) + 6x + 2)\,\mathrm{e}^{2x} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Conclusion : φ est une solution de (E_2) sur $]0;+\infty[$.

4. Soit $\mathbf{u}(x)$ une fonction deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$.
On pose, pour tout $x \in]0;+\infty[$,
$$\mathbf{v}(x) = \mathbf{u}(x)\mathrm{e}^{2x}.$$
Montrer que $\mathbf{v}(x)$ est solution de (E_2) si et seulement si $\mathbf{u}'(x)$ est une solution de (E_1).
Correction. Pour tout $x \in]0;+\infty[$,
$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(x) &= \mathbf{u}(x)\mathrm{e}^{2x} \\
\mathbf{v}'(x) &= (\mathbf{u}'(x) + 2\mathbf{u}(x))\,\mathrm{e}^{2x} \\
\mathbf{v}''(x) &= (\mathbf{u}''(x) + 4\mathbf{u}'(x) + 4\mathbf{u}(x))\,\mathrm{e}^{2x}.
\end{aligned}$$
Ainsi
$$\begin{aligned}
&\mathbf{v}(\mathrm{x}) \text{ est solution de } (E_2) \\
&\iff x\mathbf{v}''(x) - (5x+1)\mathbf{v}'(x) + (6x+2)\mathbf{v}(x) = 0 \ \forall x > 0 \\
&\iff x\left(\mathbf{u}''(x) + 4\mathbf{u}'(x) + 4\mathbf{u}(x)\right)\mathrm{e}^{2x} - (5x+1)\left(\mathbf{u}'(x) + 2\mathbf{u}(x)\right)\mathrm{e}^{2x} + (6x+2)\mathbf{u}(x)\mathrm{e}^{2x} = 0 \ \forall x > 0 \\
&\iff x\left(\mathbf{u}''(x) + 4\mathbf{u}'(x) + 4\mathbf{u}(x)\right) - (5x+1)\left(\mathbf{u}'(x) + 2\mathbf{u}(x)\right) + (6x+2)\mathbf{u}(x) = 0 \ \forall x > 0 \\
&\iff x\mathbf{u}''(x) + (4x - 5x - 1)\,\mathbf{u}'(x) + (4x - 10x - 2 + 6x + 2)\,\mathbf{u}(x) = 0 \ \forall x > 0 \\
&\iff x\mathbf{u}''(x) - (x+1)\mathbf{u}'(x) \ \forall x > 0 \\
&\iff \mathbf{u}'(x) \text{ est une solution de } (E_1).
\end{aligned}$$

5. Résoudre (E_2) sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
Correction. On a
$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(\mathrm{x}) \text{ est solution de } (E_2) &\iff \mathbf{u}'(x) \text{ est une solution de } (E_1). \\
&\iff \mathbf{u}'(x) = Cx\mathrm{e}^{x} \ \forall x > 0 && \text{d'après Q2} \\
&\iff \mathbf{u}(x) = C(x-1)\mathrm{e}^{x} + D \ \forall x > 0 && \text{(IPP)} \\
&\iff \mathbf{v}(x) = C(x-1)\mathrm{e}^{3x} + D\mathrm{e}^{2x} \ \forall x > 0 && \text{car } \mathbf{v}(x) = \mathbf{u}(x)\mathrm{e}^{2x}.
\end{aligned}$$
Conclusion : $\mathscr{S}_{(E_2)} = \left\{ \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C(x-1)\mathrm{e}^{3x} + D\mathrm{e}^{2x} \end{array}, \quad (C,D) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Exercice 2. On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1 représenté ci-dessous :



Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal

$$\mathcal{R} = \left(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\right).$$

On note K le point de l'espace tel que $\overrightarrow{FK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FD}$.

6. Montrer que les coordonnées du point K dans $\mathcal{R}$ sont $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.
   Correction. Les coordonnées de F dans $\mathcal{R}$ sont $(1,1,1)$ et celles de D sont $(0,0,0)$. Comme $\overrightarrow{FK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FD}$, on a

$$\begin{pmatrix} x_K - 1 \\ y_K - 1 \\ z_K - 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   D'où $\begin{cases} x_K - 1 = -\frac{1}{3} \\ y_K - 1 = -\frac{1}{3} \\ z_K - 1 = -\frac{1}{3} \end{cases}$ ie $\begin{cases} x_K = \frac{2}{3} \\ y_K = \frac{2}{3} \\ z_K = \frac{2}{3} \end{cases}$.

7. Montrer que les droites (EK) et (DF) sont orthogonales.
   Correction. $\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} - 1 \\ \frac{2}{3} - 0 \\ \frac{2}{3} - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 0$. Les droites (EK) et (DF) sont donc orthogonales.

8. Calculer la distance EK.
   Correction. $EK = \|\overrightarrow{EK}\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Soit M un point du segment $[HG]$. On note $m = HM$ (m est donc un réel appartenant à $[0;1]$).

9. Montrer que, pour tout m appartenant à l'intervalle $[0;1]$, le volume du tétraèdre $EMFD$, en unité de volume, est égal à $\frac{1}{6}$.
   Correction.

10. $V_{EMFD} = \frac{\mathcal{A}_{EMF} \times HD}{3} = \frac{\frac{\text{Base} \times \text{Hauteur}}{2} \times 1}{3} = \frac{\frac{EF \times EH}{2}}{3} = \frac{1}{6}$.

    Conclusion : Pour tout m appartenant à l'intervalle $[0;1]$, le volume du tétraèdre $EMFD$, en unité de volume, est égal à $\frac{1}{6}$.

11. Déterminer une équation cartésienne du plan (MFD).

 Correction. On pose $\vec{n}_m = \overrightarrow{DF} \wedge \overrightarrow{DM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ m \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-m \\ -1 \\ m \end{pmatrix}$.

 Une équation cartésienne du plan (MFD) est $(1-m)x - y + mz = 0$.

12. On note d_m la distance du point E au plan (MFD). Montrer que pour tout $m \in [0;1]$,

$$d_m = \frac{1}{\sqrt{2m^2 - 2m + 2}}.$$

 Correction. $d_m = \frac{|(1-m)x_E - y_E + mz_E|}{\sqrt{(1-m)^2 + (-1)^2 + m^2}} = \frac{|(1-m)-0+m|}{\sqrt{2m^2-2m+2}} = \frac{1}{\sqrt{2m^2-2m+2}}$.

13. Déterminer la position de M sur le segment $[HG]$ pour laquelle la distance d_m est maximale.

 Correction. d_m est maximale, si et seulement si d_m^2 est maximale, si et seulement si $\frac{1}{2m^2-2m+2}$ est maximale, si et seulement si $2m^2 - 2m + 2$ est minimale. On pose

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ & m & \mapsto & 2m^2 - 2m + 2. \end{array}$$

 L'étude de la fonction φ (calcul de φ', étude du signe de φ', tableau de variations de φ) montre que φ est minimale lorsque $m = \frac{1}{2}$.

 Conclusion : d_m est maximale si et seulement si M est le milieu du segment $[HG]$.

14. En déduire que lorsque la distance d_m est maximale, le point K est le projeté orthogonal de E sur le plan (MFD).

 Correction. On suppose que d_m est maximale. Dans ce cas, les coordonnées de M sont $(0; \frac{1}{2}; 1)$.

 K est le projeté orthogonal de E sur le plan (MFD) d'équation $\frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2}z = 0$ si et seulement si $K \in (MFD)$ et $\overrightarrow{EK}$ est colinéaire à $\vec{n}_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}; -1; \frac{1}{2}\right)$.

 $K \in (MFD)$ car $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 0$ et $\overrightarrow{EK} = -\frac{2}{3}\vec{n}_{\frac{1}{2}}$.

 On a montré que lorsque d_m est maximale, le point K est le projeté orthogonal de E sur le plan (MFD).

On note $\mathscr{S}$ la sphère de centre M et de rayon $r = \sqrt{2}$.

15. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{S}$.

 Correction. $\mathscr{S} : x^2 + (y-m)^2 + (z-1)^2 = 2$.

16. On note M' le projeté orthogonal du point M sur le plan (AFG). Déterminer les coordonnées du point M'.

 Correction. On note Δ la droite passant par M perprendiculaire au plan (AFG). Une représentation paramétrique de Δ est :

$$\begin{cases} x = 0 + 0 \times t \\ y = m + 1 \times t \\ z = 1 - 1 \times t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

 Une équation cartésienne de (AFG) est : $y - z = 0$.

 Comme $M' \in \Delta \cap (AFG)$, on a $\begin{cases} x_{M'} = 0 \\ y_{M'} = m + t \\ z_{M'} = 1 - t \end{cases}$, avec t à déterminer, et $y_{M'} - z_{M'} = 0$. Donc $(m+t) - (1-t) = 0$, ie $t = \frac{1-m}{2}$.

 On en déduit les coordonnées de M' : $\left(0; \frac{1+m}{2}; \frac{1+m}{2}\right)$.

17. Montrer que quel que soit $m \in [0;1]$, M' appartient à une droite dont on déterminera un système d'équations cartésiennes.

Correction. Quel que soit $m \in [0;1]$, on a $x_{M'} = 0$ et $y_{M'} = z_{M'}$. M' appartient à la droite dont une représentation cartésienne est : $\begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$.

18. Déterminer l'intersection $(AFG) \cap \mathscr{S}$.
Correction. $MM' = \|\overrightarrow{MM'}\| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{1-m}{2}\right)^2 + \left(\frac{m-1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(1-m)^2} = \frac{1-m}{\sqrt{2}}$.
Comme $m \in [0;1]$, on a toujours $MM' < \sqrt{2}$. Donc $(AFG) \cap \mathscr{S}$ est le cercle inclus dans le plan (AFG) de centre M' et de rayon $\sqrt{r^2 - MM'^2} = \sqrt{2 - \frac{(1-m)^2}{2}} = \sqrt{\frac{3+2m-m^2}{2}}$.

19. Déterminer l'intersection $(HG) \cap \mathscr{S}$.
Correction. Une représentation paramétrique de la droite (HG) est

$$(HG) : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 \end{cases}.$$

On a

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in (HG) \cap \mathscr{S} &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 1 \\ x^2 + (y-m)^2 + (z-1)^2 = 2 \end{cases} &&\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 1 \\ (t-m)^2 = 2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 1 \\ |t-m| = \sqrt{2} \end{cases} &&\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 1 \\ t = m + \sqrt{2} \text{ ou } t = m - \sqrt{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = m + \sqrt{2} \\ z = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 0 \\ y = m - \sqrt{2} \\ z = 1 \end{cases}.$$

Conclusion. $(HG) \cap \mathscr{S}$ est une paire de points : $K\left(0, m + \sqrt{2}, 1\right)$ et $L\left(0, m - \sqrt{2}, 1\right)$.

Exercice 3. On munit $\mathscr{E}$ d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On note $\mathcal{D}$ la droite passant par O et dirigée par $\vec{u} = (1,1,1)$ et $\mathcal{Q}$ le plan d'équation : $y + z = 0$. On considère la famille de plans

$$\mathcal{P}_m : x + my - mz = 1,$$

où $m \in \mathbb{R}$.

20. Montrer que quel que soit le réel m, la droite $\mathcal{D}$ n'est jamais perpendiculaire au plan $\mathcal{P}_m$.
Correction. Soit $m \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} \perp \mathcal{P}_m &\iff \vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{n}_m \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ -m \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires} \\
&\iff m = 1 \text{ et } m = -1,
\end{aligned}$$

Ce qui est faux. On a montré par équivalence, quel que soit le réel m, la droite $\mathcal{D}$ n'est jamais perpendiculaire au plan $\mathcal{P}_m$.

21. Soit $m \in \mathbb{R}$ fixé. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{R}_m$ contenant $\mathcal{D}$ et perpendiculaire à $\mathcal{P}_m$.

Correction. $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}_m$ donc O est un point de $\mathcal{R}_m$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur générateur de $\mathcal{R}_m$. De plus $\mathcal{R}_m \perp \mathcal{P}_m$ donc $\vec{n}_m\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ -m \end{pmatrix}$ est également un vecteur générateur de $\mathcal{R}_m$.

On pose $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ -m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2m \\ 1+m \\ m-1 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal de $\mathcal{R}_m$.

Conclusion. Une équation cartésienne de $\mathcal{R}_m$ est $-2mx + (1+m)y + (m-1)z = 0$.

22. Montrer que pour tout réel m, l'intersection des plans $\mathcal{P}_m$, $\mathcal{R}_m$ et $\mathcal{Q}$ est un point I_m dont on déterminera les coordonnées dans $\mathcal{R}$.

Correction. On a

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in Q \cap P_m \cap R_m &\iff \begin{cases} y + z = 0 \\ x + my - mz = 1 \\ -2mx + (1+m)y + (m-1)z = 0 \end{cases} \qquad \text{(Gauss-Jordan)} \\ &\iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{1+2m^2} \\ y = \dfrac{m}{1+2m^2} \\ z = -\dfrac{m}{1+2m^2} \end{cases} \qquad (1+2m^2 \neq 0)\ .\end{aligned}$$

Conclusion : $Q \cap P_m \cap R_m = \{I_m\}$ où I_m est le point de coordonnées $\left(\dfrac{1}{1+2m^2}, \dfrac{m}{1+2m^2}, -\dfrac{m}{1+2m^2}\right)$.

23. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble d'équation $x^2+y^2+z^2 = x$. Montrer que $\mathcal{S}$ est une sphère dont on déterminera les coordonnées du centre, ainsi que son rayon.

Correction. On a

$$x^2 + y^2 + z^2 = x \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4}.$$

Conclusion : $\mathcal{S}$ est la sphère de centre $\Omega\left(\dfrac{1}{2}, 0, 0\right)$ et de rayon $r = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$.

24. Montrer que l'intersection de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{Q}$ est un cercle $\mathcal{C}$ dont on déterminera le centre et le rayon.

Correction. On a

$$\mathrm{d}\left(\Omega, \mathcal{Q}\right) = \frac{|y_\Omega - z_\Omega|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2}} = 0 < r.$$

On en déduit que $\Omega \in \mathcal{Q}$ et que $\mathcal{S} \cap \mathcal{Q}$ est le cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon $\dfrac{1}{2}$ inclus dans $\mathcal{Q}$.

25. Montrer que quel que soit le réel m, I_m appartient à $\mathcal{C}$.

Correction. Soit $m \in \mathbb{R}$. Par définition $I_m \in \mathcal{Q}$ et

$$\begin{aligned}
(x_{I_m})^2 + (y_{I_m})^2 + (z_{I_m})^2 - x_{I_m} &= \left(\frac{1}{1+2m^2}\right)^2 + \left(\frac{m}{1+2m^2}\right)^2 + \left(-\frac{m}{1+2m^2}\right)^2 - \frac{1}{1+2m^2} \\
&= \frac{1+m^2+m^2-(1+2m^2)}{(1+2m^2)^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

donc $I_m \in \mathcal{S}$. Ainsi $I_m \in \mathcal{S} \cap \mathcal{Q}$ et donc $I_m \in \mathcal{C}$.

Conclusion : Pour tout $m \in \mathbb{R}$, I_m appartient à $\mathcal{C}$.