

Devoir à la maison n°4
Suites réelles
À rendre mardi 03/03/2026

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}.$$

On définit $f(x) = \frac{3x + 2}{x + 4}$ sur l'intervalle $[0, 1]$. On note \mathcal{C}_f son graphe (unité graphique : 10 cm).

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
2. En déduire que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$.
3. En utilisant \mathcal{C}_f et la première bissectrice, placer les premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$ (récurrence - on pensera à utiliser la fonction f).
5. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
6. Que peut-on en déduire ? Déterminer $\lim u_n$.

On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}.$$

7. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique et déterminer l'expression de v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
8. En déduire l'expression explicite de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
9. Retrouver le résultat de la question 6.

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^3}{12} - x + 1$.

1.
 - a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 - b) Justifier que f est dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$, calculer $f'(x)$ et déterminer le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$. En déduire le tableau de variation de f .
2.
 - a) Montrer que f s'annule exactement deux fois sur l'intervalle $[0, +\infty[$: une première fois sur l'intervalle $[0, 2]$ et une deuxième fois sur l'intervalle $]2, +\infty[$.
On notera β et γ les deux solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $[0, +\infty[$ avec $\beta < \gamma$.
 - b) Simplifier l'expression $1 + \frac{\beta^3}{12}$ (on l'exprimera à l'aide de β).
 - c) À l'aide de la calculatrice, montrer que β appartient à $]1; 1,2[$ et que γ appartient à $]2,7; 2,8[$.
 - d) Préciser le signe de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $[0, +\infty[$.
4. On cherche à obtenir une approximation de β . À cet effet, on définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + \frac{u_n^3}{12}. \end{cases}$$

- a) Calculer u_1 puis démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , u_n appartient à l'intervalle $[0, \beta]$.
- b) Vérifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = f(u_n)$.
Que peut-on en déduire sur la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
- c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers β .
- d) Écrire dans le langage de votre choix (MAPLE, MATHEMATICA ou autre) un programme de quelques lignes permettant d'obtenir pour un entier N donné la valeur de u_N .