Devoir à la maison n°4 – Correction

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}.$$

On définit $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+4}$ sur l'intervalle $[0, 1]$. On note $\mathscr{C}_f$ son graphe (unité graphique : 10 cm).

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   Pour tout $x \in [0, 1]$, $f'(x) = \dfrac{3(x+4) - (3x+2)}{(x+4)^2} = \dfrac{10}{(x+4)^2} > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle $[0, 1]$.
2. En déduire que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$.
   On constate que lorsque $x \in [0, 1]$, $f(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, or $\left[\frac{1}{2}, 1\right] \subset [0, 1]$. Ainsi pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$.
3. En utilisant $\mathscr{C}_f$ et la première bissectrice, placer les premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.
   Question traitée en classe.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ *(récurrence - on pensera à utiliser la fonction f)*.
   On pose H_n : "$0 \leqslant u_n \leqslant 1$".
   Initialisation : H_0 est vraie car $u_0 = 0$.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose H_n vraie et on montre H_{n+1}. On suppose que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, donc $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$ car f est croissante sur l'intervalle $[0, 1]$, d'où $0 \leqslant \frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ et H_{n+1} est vraie.
   Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
5. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3u_n+2}{u_n+4} - u_n = \dfrac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n+4} = \dfrac{-(u_n-1)(u_n+2)}{u_n+4}$
   or $u_n \in [0, 1]$, donc $-(u_n - 1) \geqslant 0$, $(u_n + 2) > 0$ et $(u_n + 4) > 0$.
   Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
   Conclusion : La suite (u_n) est croissante.
6. Que peut-on en déduire ? Déterminer $\lim u_n$.
   La suite (u_n) étant croissante et majorée par 1, elle converge vers une limite finie ℓ d'après le théorème de la limite monotone : $\lim u_n = \ell$.
   On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n+2}{u_n+4}$. Par passage à la limite, on obtient $\ell = \dfrac{3\ell+2}{\ell+4}$, donc $\ell^2 + \ell - 2 = 0$, donc $\ell = 1$ ou $\ell = -2$.
   De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, et par passage à la limite, on a $0 \leqslant \ell \leqslant 1$. D'où $\ell = 1$.
   Conclusion : $\lim u_n = 1$.

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}.$$

7. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et déterminer l'expression de v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} \\ &= \frac{\dfrac{3u_n+2}{u_n+4}-1}{\dfrac{3u_n+2}{u_n+4}+2} \\ &= \frac{3u_n+2-(u_n+4)}{3u_n+2+2(u_n+4)} \\ &= \frac{2u_n-2}{5u_n+10} \\ &= \frac{2}{5}\times\frac{u_n-1}{u_n+2} \\ &= \frac{2}{5}\times v_n. \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{2}{5}v_n$. La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{2}{5}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n$ ie $v_n = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

8. En déduire l'expression explicite de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2} &\iff v_n(u_n+2) = u_n - 1 \\ &\iff u_n(v_n-1) = -(1+2v_n) \\ &\iff u_n = -\frac{1+2v_n}{v_n-1}. \end{aligned}$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1+2v_n}{1-v_n} = \dfrac{1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}{1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}$.

9. Retrouver le résultat de la question 6.
   On a $\lim v_n = 0$ car $-1 < \dfrac{2}{5} < 1$. Ainsi $\lim u_n = \dfrac{1+0}{1-0} = 1$.

Exercice 2.

Question 1a :

Par comparaison, on a

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

Question 1b :

f est une fonction polynomiale dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

Pour tout $x \in [0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{x^2}{4} - 1$.

Soit $x \in [0,+\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff x^2 - 4 = 0 \\ &\iff x = -2 \text{ ou } x = 2 \\ &\iff x = 2 && \text{car } x \in [0,+\infty[\end{aligned}$$

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Question 2a :

Application du théorème de la bijection :

f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0,2]$, donc f réalise une bijection de l'intervalle $[0,2]$ sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{3},1\right]$ (qui contient 0). Il existe donc un unique $\beta \in [0,2]$ tel que $f(\beta) = 0$.

De même, f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]2,+\infty[$, f réalise une bijection de l'intervalle $]2,+\infty[$ sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{3},+\infty\right[$ (qui contient 0). Il existe donc un unique $\gamma \in]2,+\infty[$ tel que $f(\gamma) = 0$.

Conclusion : f s'annule exactement deux fois : une première fois en β qui appartient à l'intervalle $[0,2]$ et une deuxième fois en γ qui appartient à l'intervalle $]2,+\infty[$.

Question 2b :

On sait que $f(\beta)=0$, donc $\dfrac{\beta^3}{12}-\beta+1=0$ et donc $\boxed{1+\dfrac{\beta^3}{12}=\beta}$.

Question 2c :

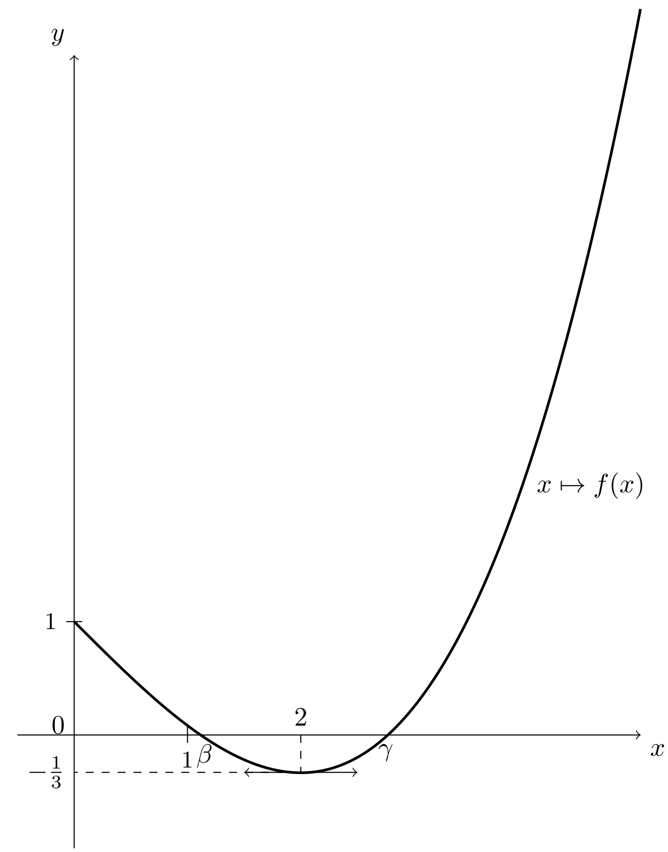
$f(1)=0,08>0$ et $f(1,2)\simeq -0,06<0$ donc $\boxed{\beta\in\,]1;1,2[}$.

De même, $f(2,7)\simeq -0,06<0$ et $f(2,8)\simeq 0,03>0$ donc $\boxed{\gamma\in\,]2,7;2,8[}$.

Question 2d :

x	0		β		γ		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Question 3 :



Question 4a :

$$\boxed{u_1=1+\frac{u_0^3}{12}=\frac{13}{12}}$$

Récurrence : On pose $\mathcal{H}_n$: $u_n\in[0,\beta]$.

$u_0=1$ donc $u_0\in[0,\beta]$ d'après la question 2c. $\mathcal{H}_0$ est donc vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{H}_n$ vraie.

$$\begin{aligned} 0 \leqslant u_n \leqslant \beta &\Longrightarrow 0 \leqslant u_n^3 \leqslant \beta^3 && \text{(car la fonction x} \mapsto x^3 \text{ est croissante sur } \mathbb{R}) \\ &\Longrightarrow 0 \leqslant \frac{u_n^3}{12} \leqslant \frac{\beta^3}{12} \\ &\Longrightarrow 1 \leqslant 1 + \frac{u_n^3}{12} \leqslant 1 + \frac{\beta^3}{12} \\ &\Longrightarrow 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant \beta && \text{(d'après le résultat de la question 2b)} \end{aligned}$$

Ainsi $u_{n+1} \in [1, \beta]$, or $[1, \beta] \subset [0, \beta]$, donc $u_{n+1} \in [0, \beta]$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0, \beta]}$

Question 4b :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 1 + \dfrac{u_n^3}{12} - u_n$ et $f(u_n) = \dfrac{u_n^3}{12} - u_n + 1$, donc

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = f(u_n).}$$

or $u_n \in [0, \beta]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (d'après la question précédente) et f est positive sur l'intervalle $[0, \beta]$ (d'après la question 2d). Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) \geqslant 0$.

Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante}}$.

Question 4c :

On a montré que la suite (u_n) est croissante et majorée par β. La suite (u_n) est donc convergente d'après le théorème de la limite monotone. On note $\ell = \lim u_n$.

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n^3}{12}$. Par passage à la limite, on a $\ell = 1 + \dfrac{\ell^3}{12}$, donc $\dfrac{\ell^3}{12} - \ell + 1 = 0$, c'est-à-dire $f(\ell) = 0$. Ainsi $\ell = \beta$ ou $\ell = \gamma$ (d'après 2a). De plus $u_n \in [0, \beta]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\ell \in [0, \beta]$ par passage à la limite. Finalement $\ell = \beta$.

Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers } \beta}$.

Question d :

```
def u(n):
    u=1
    for i in range(0,n,1):
        u=1+float(u**3)/12
    return u

N=int(input("Saisir la valeur de N : "))
print("u("+str(N)+")="+str(u(N)))
```