Exercice 1

On considère les matrices à coefficients réels :

$$M_1=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad M_2=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On désigne par E l'ensemble des matrices $a\,M_1 + b\,M_2$, où a et b sont des réels, c'est à dire :

$$E = \left\{ a\,M_1 + b\,M_2 \,,\, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1- a) Calculer M_1^2, M_2^2, $M_1 M_2$, $M_2 M_1$. Vérifier que ces quatre matrices appartiennent à E .

b) Le produit de deux matrices quelconques de E est-il une matrice de E ?

Soient a et b deux réels et $M = a\,M_1 + b\,M_2$.

2- Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$M^n = 3^{n-1} a^n M_1 + 6^{n-1} b^n M_2 .$$

3- On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k$ avec la convention $M^0 = I$.

a) Montrer qu'il existe deux réels α_n et β_n tels que $S_n = I + \alpha_n M_1 + \beta_n M_2$.

b) Montrer que les suites (α_n) et (β_n) convergent vers des réels α et β que l'on exprimera en fonction de a et b.

On rappelle que pour tout x réel : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

On pose $e^M = I + \alpha\,M_1 + \beta\,M_2$, ce qui permet de définir e^M pour toute matrice M de E.

4- Soient M et M' deux matrices de E.

Montrer l'égalité : $e^M \times e^{M'} = e^{M+M'}$.

PREMIER PROBLÈME

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Première Partie

Soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans lui-même dont la matrice est M dans la base canonique.

1. Soient $X = (x, y, z)$ et $X' = (x', y', z')$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$. On suppose que l'on a $X' = f(X)$. Exprimer x', y' et z' en fonction de x, y et z.

2. a) Déterminer le noyau de f c'est à dire le sous-espace vectoriel K de $\mathbb{R}^3$ constitué des vecteurs X vérifiant $f(X) = (0, 0, 0)$. En donner une base et la dimension.
   b) Déterminer le sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^3$ constitué des vecteurs $f(X)$, pour X élément quelconque de $\mathbf{R}^3$. En donner une base et la dimension.

3. K et E sont-ils supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$?

Deuxième Partie

On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad N^{n+1} = N^n \times N$; avec la convention $N^0 = I$.

1. Vérifier que $N^2 = -2N + 3I$.

2. Montrer qu'il existe deux suites (u_n) et (v_n) telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad N^n = u_n N + v_n I \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n \end{cases}$$

   (On pourra procéder par récurrence.)

3. Soit n un entier naturel quelconque.
   a) Vérifier la relation $u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n$.
   b) En déduire que l'on a : $u_{n+1} = -3\,u_n + 1$.
   c) Démontrer que la suite $\left(u_n - \dfrac{1}{4}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

4. Exprimer u_n, v_n et N^n en fonction de n.

Problème : Différentes méthodes de calcul des puissances d'une matrice

Tout au long de ce problème, M désigne la matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels définie par :

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

et I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3, c'est-à-dire : $\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Une première méthode pour le calcul des puissances de M .

Considérons la matrice A définie par : $\mathrm{A} = \dfrac{1}{4}(\mathrm{M} - \mathrm{I}_3)$.

1.1 Calculer A puis A^2.

1.2 Exprimer la matrice M en fonction de la matrice A.

1.3 Montrer que pour tout entier n appartenant à $\{0, 1, 2\}$, il existe un réel u_n tel que : $\mathrm{M}^n = \mathrm{I}_3 + u_n\mathrm{A}$.

Nous rappelons que : $\mathrm{M}^0 = \mathrm{I}_3$.

1.4 Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, il existe un réel u_n tel que : $\mathrm{M}^n = \mathrm{I}_3 + u_n\mathrm{A}$.

La preuve mettra en avant la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -3\,u_n + 4$.

1.5 Considérons la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 1$.

1.5.1 Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

1.5.2 En déduire pour tout entier naturel n, une expression de v_n en fonction de n.

1.5.3 En déduire alors, pour tout entier naturel n, une expression de u_n en fonction de n.

1.6 Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, en déduire une écriture matricielle de M^n ne faisant intervenir que l'entier n.

2. Une seconde méthode de calcul des puissances de M .

2.1 Montrer qu'il existe une unique matrice J appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\mathrm{M} = 4\mathrm{J} - 3\mathrm{I}_3$.

2.2 Calculer J^2, puis pour tout entier naturel non nul n , J^n .

2.3 Soit n un entier naturel non nul.

2.3.1 Énoncer la formule du binôme. *Aucune preuve n'est attendue.*

En remarquant que : $(4\mathrm{J}) \times (-3\mathrm{I}_3) = (-3\mathrm{I}_3) \times (4\mathrm{J})$, nous admettrons que la formule du binôme s'applique au développement de $(4\mathrm{J} - 3\mathrm{I}_3)^n$.

2.3.2 Montrer que : $\mathrm{M}^n = (-3)^n\mathrm{I}_3 + \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k}\right) \mathrm{J}$.

2.3.3 Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} = 1 - (-3)^n$.

2.3.4 En déduire une expression de M^n en fonction de n , I_3 et J ,
puis une écriture matricielle de M^n ne faisant intervenir que l'entier n .

2.4 Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, en déduire une écriture matricielle de M^n ne faisant intervenir que l'entier n .

On considère la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 4 & -15 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \end{pmatrix}$.

I_3 désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. On pose $B = A - I_3$.

a. Calculer B^2.

b. En déduire une relation entre A^2, A et I_3.

2. On considère le polynôme $P = X^2 - 2X + 1$. Déterminer les racines de P.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire la relation de division euclidienne de X^n par P, dont le reste sera noté R_n.

b. Déterminer R_n.

4. Déduire de ce qui précède l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$;

5. Proposer une autre méthode pour déterminer A^n.

****

Soit a et b deux nombres réels et n un entier naturel.

Calculer $\displaystyle\int_a^b (x-a)^n (x-b)^n dx$.