Devoir à la maison
Espaces vectoriels

Exercice 1. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la famille $\mathscr{F} = (A, B, C, D)$ constitue une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les coordonnées de la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{F}$. En déduire $\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(M)$.

Exercice 2. On considère la partie F de $\mathbb{R}^4$ définie par

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x - z = 0 \text{ et } x - 3y + t = 0\right\}.$$

1. Montrer que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Déterminer une base de F. En déduire la dimension de F.

Soient

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On pose

$$G = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3).$$

3. La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?
4. Déterminer une base de G, ainsi que sa dimension.
5. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in G$. Déterminer une équation satisfaite par les coordonnées de X.
6. Déterminer $F \cap G$.
7. A-t-on $F + G = \mathbb{R}^4$?

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $F = \{\, P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer une base et la dimension de F.

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note $P_k(X) = (X - 1)X^k$.

3. Montrer que $\mathscr{B} = (P_0, \ldots, P_{n-1})$ est une base de F.
4. Déterminer les coordonnées de $P = (X - 1)^n$ dans la base $\mathscr{B}$.