Devoir à la maison - S'entraîner

Ce sujet contient deux exercices indépendants et un sujet de concours.

Exercice 1. On note

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,\, y,\, z) & \mapsto & (-x+y+z,\, -6x+4y+2z,\, 3x-y+z)\,. \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et A la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$. Déterminer A.
3. Montrer que $f \circ f = 2f$.
4. Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$. Interpréter le résultat.

Dans la suite, on pose $u = (1, 2, -1)$.

5. En déduire le rang de f. Interpréter le résultat.
6. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Dans la suite, on pose $v = (1, 6, -3)$ et $w = (1, 2, 1)\,$.

7. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
8. On note $\mathscr{F}$ la famille (u, v, w).
   Montrer que $\mathscr{F}$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$.
9. On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{F}$. Déterminer P, ainsi que P^{-1}.
10. On note D la matrice de f dans la base $\mathscr{F}$. Rappeler la formule de changement de bases et déterminer D.
11. Retrouver ce résultat en utilisant la définition de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(f)$.
12. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
13. Déterminer l'expression explicite de A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. On note

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & 2P - (X-1)P'. \end{array}$$

1. Montrer que f est bien définie.
   Indication : Il s'agit de montrer que si $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et A la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$. Déterminer A.

   Indication : Calculer $f(1)$, $f(X)$ et $f(X^2)$. Utiliser la définition de $Mat_{\mathscr{B}}(f)$.
4. Déterminer le rang de f. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
5. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
6. On note $\mathscr{C} = \big(1, (X-1), (X-1)^2\big)$. Montrer que $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
7. On note B la matrice de f dans la base $\mathscr{C}$. Déterminer B.

   Indication : Calculer $f(1)$, $f(X-1)$ et $f((X-1)^2)$. Utiliser la définition de $Mat_{\mathscr{C}}(f)$.
8. On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$. Déterminer P et P^{-1}.
9. Quelle relation lient les matrices A, B, P et P^{-1} ?
10. Déterminer l'expression explicite de la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Épreuve de Mathématiques
(toutes filières)

Lundi 18 mai 2009 de 14h00 à 18h00

Instructions générales :

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4, 4/4.
Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette à code à barres correspondant à l'épreuve commune de Mathématiques.

L'emploi d'une calculatrice est interdit

Remarque importante :
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème I : Algèbre et Géométrie

A. Etude de deux applications

La notation $\mathbb{R}_2[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On identifiera dans la suite de ce problème les éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ et leurs fonctions polynomiales associées. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On définit les deux applications suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\left[P\left(\dfrac{X}{2}\right) + P\left(\dfrac{X+1}{2}\right)\right] \end{array}$$

et

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(1) \end{array}$$

On rappelle aussi que l'on note $f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f \circ f^{n-1}$.

1. Vérifier que f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ et montrer que f est linéaire.
2. Montrer que φ est linéaire.
3. Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$, en indiquant les calculs intermédiaires.
4. L'application f est-elle injective ? surjective ?
5. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,\varphi$. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}\,\varphi$?
6. L'application φ est-elle injective ? surjective ?

B. Calcul des puissances successives d'une matrice

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Enfin, on note $\mathcal{B}'$ la famille de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$\mathcal{B}' = (1, -2X + 1, 6X^2 - 6X + 1).$$

7. Justifier que la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

8. Ecrire la matrice de passage Q de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

9. Justifier que Q est inversible et calculer son inverse.

10. Ecrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}'$ en donnant les calculs intermédiaires.

11. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On explicitera les neuf coefficients de A^n.

12. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $P = a + bX + cX^2$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f^n(P)$ en fonction de a, b, c.

13. En déduire que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \lim_{n \to +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t)\, dt.$$

C. Une autre preuve du résultat précédent

14. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f^n(P) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n - 1} P\left(\frac{X + k}{2^n}\right).$$

15. En déduire, en utilisant un résultat du cours d'analyse que l'on énoncera avec précision, que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \lim_{n \to +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t)\, dt.$$

D. Etude d'une famille de sphères et d'une famille de droites

L'espace affine usuel est rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les différentes équations qui apparaissent dans la partie D. sont relatives au repère $\mathcal{R}$. Pour tout m réel, on considère l'ensemble S_m d'équation cartésienne

$$S_m \quad : \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2mz\sqrt{2} + m^2 - 2 = 0.$$

On appelle aussi $\mathcal{E}$ l'ensemble des points de l'espace vérifiant l'équation

$$\mathcal{E} \quad : \quad x^2 + y^2 = z^2 + 2.$$

On note enfin $\mathcal{P}$ le plan d'équation $y = 0$, c'est-à-dire le plan (xOz).

16. Démontrer que, pour tout m réel, S_m est une sphère dont on déterminera le centre et le rayon.

17. Montrer que l'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{E}$ est une conique G, dont on déterminera la nature et les asymptotes éventuelles.

18. Représenter dans le plan $\mathcal{P}$ la conique G.

19. Donner l'excentricité ainsi que les coordonnées du ou des foyer(s) dans le repère $\mathcal{R}$ de la conique G.