Devoir surveillé n°3

Mathématiques

Durée : 1 heure et 30 minutes

CALCULATRICE AUTORISÉE

Il sera tenu compte dans la notation de la copie :

1. **De la qualité de la rédaction** :
   justification des affirmations, introduction des variables utilisées, utilisation à bon escient des symboles
   $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, $=$ ...
2. **De la présentation** :
   résultats encadrés, calculs bien présentés, écriture aérée et lisible...

Exercice 1. Résolutions d'équations dans $\mathbb{C}$

1. Vérifier que $\delta = 4 - \mathbf{i}$ est une racine carrée de $\Delta = 15 - 8\mathbf{i}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (4+\mathbf{i})z + 4\mathbf{i} = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^4 - (4+\mathbf{i})z^2 + 4\mathbf{i} = 0. \quad (E)\,.$$

4. Placer l'ensemble des solutions de l'équation (E) dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique $\underline{\underline{2 \text{ cm}}}$.

Exercice 2. Résolution de systèmes linéaires

5. Résoudre le système linéaire suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} x - 2y - z &= 1 \\ x + 3y &= 2 \\ 3x - 2z &= 4 \end{cases}.$$

   Vérifier le résultat obtenu.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère le système linéaire suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(\mathcal{S}_2) \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ x + 3y - 2z = 1 \\ 2x - y + az = a - 1 \end{cases}.$$

6. Calculer $\det(\mathcal{S}_2)$.
7. Pour quelle(s) valeur(s) de a, le système $\mathcal{S}_2$ admet-il une unique solution ?
8. Résoudre $\mathcal{S}_2$ lorsque $a = 3$.
9. Résoudre $\mathcal{S}_2$ lorsque $a \neq 3$.

Tourner la page svp

Exercice 3. Valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

On pose $\omega = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{2\pi}{5}} = \exp\left(\mathbf{i}\dfrac{2\pi}{5}\right)$, $S = \omega + \omega^4$ et $T = \omega^2 + \omega^3$.

10. Vérifier que $\omega^5 = 1$.
11. Montrer que : $\overline{\omega} = \omega^4$ et $\overline{\omega^2} = \omega^3$.
12. Montrer que : $S = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et $T = 2\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.
    En déduire le signe de S et celui de T.
13. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} \omega^k = 0$.
14. Montrer que : $S + T = -1$ et $ST = -1$.
15. Déterminer S et T.
16. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.