Devoir surveillé n°3

Mathématiques

Durée : 2 heures

CALCULATRICE INTERDITE

Il sera tenu compte dans la notation de la copie :

1. **De la qualité de la rédaction** :
   justification des affirmations, introduction des variables utilisées, utilisation à bon escient des symboles $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, $=$ ...
2. **De la présentation** :
   résultats encadrés, calculs bien présentés, écriture aérée et lisible...

Exercice 1. Soient $z_1 = \sqrt{3} - \mathbf{i}$ et $z_2 = 1 - \mathbf{i}$. On pose $z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1. Déterminer la forme algébrique du complexe z.
2. Écrire sous forme exponentielle les complexes z_1 et z_2.
3. En déduire la forme exponentielle du complexe z.
4. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.
5. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice 2. QCM (aucune justification n'est demandée)

6. Soit $z = (3 - \mathbf{i})(5 + 3\mathbf{i})$. La partie imaginaire du nombre complexe $\overline{z}$ est :

   (a) -4
   (b) 4
   (c) $4\mathbf{i}$
   (d) $-4\mathbf{i}$

7. La forme algébrique de l'inverse du nombre complexe $z = 2 - 3\mathbf{i}$ est :

   (a) $-2 + 3\mathbf{i}$
   (b) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\mathbf{i}$
   (c) $\dfrac{2}{13} + \dfrac{3}{13}\mathbf{i}$
   (d) $-\dfrac{2}{5} - \dfrac{3}{5}\mathbf{i}$

8. Soit le polynôme P tel que $P(z) = z^3 - 2z^2 + 2z$. Alors $P(2\mathbf{i})$ est égal à :

   (a) $2 - 6\mathbf{i}$
   (b) $2 + 12\mathbf{i}$
   (c) $8 + 12\mathbf{i}$
   (d) $8 - 4\mathbf{i}$

9. L'équation $(-4 + 3\mathbf{i})\, z = 4 + 2\mathbf{i}$ a pour solution :

   (a) $z = -\dfrac{24}{25} - \dfrac{4}{5}\mathbf{i}$
   (b) $z = \dfrac{24}{25} + \dfrac{4}{5}\mathbf{i}$
   (c) $z = -\dfrac{2}{5} - \dfrac{4}{5}\mathbf{i}$
   (d) $z = \dfrac{2}{5} + \dfrac{4}{25}\mathbf{i}$

Exercice 3. Résolution de systèmes linéaires

10. Résoudre le système linéaire suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} x - 2y - z &= -2 \\ x + 3y &= 9 \\ 3x - 2z &= 7 \end{cases}.$$

Vérifier le résultat obtenu.

Soit a un réel fixé. On considère le système linéaire suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(\mathcal{S}_2) \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ x + 3y - 2z = 1 \\ 2x + y + az = 2 \end{cases}.$$

11. Calculer $\det(\mathcal{S}_2)$.
12. Discuter, suivant la valeur de a, le nombre de solutions du systeme $\mathcal{S}_2$
13. Résoudre $\mathcal{S}_2$ lorsque $a = 1$.

Exercice 4. Linéarisation d'expressions trigonométriques

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = 8 \sin^4(x).$$

14. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin^4(x) = \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}.$$

15. En déduire l'expression d'une primitive $F(x)$ de la fonction $f(x)$.

Exercice 5. Sommes et nombres complexes.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on note

$$z_k = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{2k\pi}{n}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

On introduit les sommes complexes suivantes :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} z_k \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=1}^{n-1} k z_k.$$

16. Calculer S_2, S_3, T_2 et T_3.
17. Montrer que $S_n = -1$.

Indication : On rappelle que pour $N \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $\sum_{k=0}^{N} q^k = \frac{q^{N+1}-1}{q-1}$.

18. En déduire les valeurs exactes de $\sum_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ et $\sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$.
19. Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $q \neq 1$. Avec un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k q^k = \frac{q - nq^n + (n-1)q^{n+1}}{(q-1)^2}.$$

20. En déduire que

$$T_n = \frac{n}{\mathrm{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{n}} - 1}.$$

21. Vérifier cette expression dans les cas $n = 2$ et $n = 3$.
22. Montrer que, pour tout réel θ,

$$\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta} - 1 = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\theta}{2}} \times 2\mathbf{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\theta+\pi}{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

23. En déduire les valeurs exactes de

$$\sum_{k=1}^{n-1} k\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n-1} k\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$