

DEVOIR SURVEILLÉ N°3 – Correction

Mathématiques

Exercice 1. Soient $z_1 = \sqrt{3} - \mathbf{i}$ et $z_2 = 1 - \mathbf{i}$. On pose $z = \frac{z_1}{z_2}$.

1. Déterminer la forme algébrique du complexe z .

$$\text{Correction. } z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{(\sqrt{3} - \mathbf{i})(1 + \mathbf{i})}{(1 - \mathbf{i})(1 + \mathbf{i})} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2}\mathbf{i}.$$

2. Écrire sous forme exponentielle les complexes z_1 et z_2 .

$$\text{Correction. } z_1 = 2e^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{6}} \text{ et } z_2 = \sqrt{2}e^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}.$$

3. En déduire la forme exponentielle du complexe z .

$$\text{Correction. } z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{\mathbf{i}(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{12}}.$$

4. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

$$\text{Correction. } \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

5. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

$$\text{Correction. } \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Exercice 2. QCM (aucune justification n'est demandée)

6. Soit $z = (3 - \mathbf{i})(5 + 3\mathbf{i})$. La partie imaginaire du nombre complexe \bar{z} est -4 (réponse a) :

$$z = (3 - \mathbf{i})(5 + 3\mathbf{i}) = 18 + 4\mathbf{i} \text{ et } \bar{z} = 18 - 4\mathbf{i}.$$

7. La forme algébrique de l'inverse du nombre complexe $z = 2 - 3\mathbf{i}$ est $\frac{2}{13} + \frac{3}{13}\mathbf{i}$ (réponse c) :

$$\frac{1}{z} = \frac{2 + 3\mathbf{i}}{(2 - 3\mathbf{i})(2 + 3\mathbf{i})} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}\mathbf{i}.$$

8. Soit le polynôme P tel que $P(z) = z^3 - 2z^2 + 2z$. Alors $P(2\mathbf{i})$ est égal à $8 - 4\mathbf{i}$ (réponse d) :

$$P(2\mathbf{i}) = (2\mathbf{i})^3 - 2(2\mathbf{i})^2 + 2 \times 2\mathbf{i} = -8\mathbf{i} + 8 + 4\mathbf{i} = 8 - 4\mathbf{i}.$$

9. L'équation $(-4 + 3\mathbf{i})z = 4 + 2\mathbf{i}$ a pour solution $-\frac{2}{5} - \frac{4}{5}\mathbf{i}$ (réponse c) :

$$\begin{aligned} (-4 + 3\mathbf{i})z = 4 + 2\mathbf{i} &\iff z = \frac{4 + 2\mathbf{i}}{-4 + 3\mathbf{i}} \\ &\iff z = \frac{(4 + 2\mathbf{i})(-4 - 3\mathbf{i})}{(-4 + 3\mathbf{i})(-4 - 3\mathbf{i})} \\ &\iff z = \frac{-10 - 20\mathbf{i}}{(-4)^2 + 3^2} \\ &\iff z = -\frac{2}{5} - \frac{4}{5}\mathbf{i}. \end{aligned}$$

Exercice 3. RÉOLUTION DE SYSTÈMES LINÉAIRES

10. Résoudre le système linéaire suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} x - 2y - z &= -2 \\ x + 3y &= 9 \\ 3x - 2z &= 7 \end{cases}.$$

Vérifier le résultat obtenu.

Correction.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & -2 & 7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & \boxed{1} & 11 \\ 0 & 6 & 1 & 13 \end{array} \right)$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & \boxed{1} & 11 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \end{array} \right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$(S) \iff \begin{cases} \boxed{x} = -2 + 2y + z \\ \boxed{z} = 11 - 5y \\ \boxed{y} = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{x} = 3 \\ \boxed{z} = 1 \\ \boxed{y} = 2 \end{cases}$$

Conclusion : (\mathcal{S}_1) admet une unique solution $(3, 2, 1)$.

$$\text{Vérification : } \begin{cases} 3 - 2 \times 2 - 1 = 1 & \checkmark \\ 3 + 3 \times 2 = 9 & \checkmark \\ 3 \times 3 - 2 \times 1 = 7 & \checkmark \end{cases}$$

Soit a un réel fixé. On considère le système linéaire suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(\mathcal{S}_2) \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ x + 3y - 2z = 1 \\ 2x + y + az = 2 \end{cases} .$$

11. Calculer $\det(\mathcal{S}_2)$.

$$\text{Correction. } \det(\mathcal{S}_2) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} 3a + 8 + 3 - 18 - (-2) - (-2a) =$$

$$5a - 5.$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{\det(\mathcal{S}_2) = 5a - 5.}$$

12. Discuter, suivant la valeur de a , le nombre de solutions du système \mathcal{S}_2

Correction. Lorsque $\det(\mathcal{S}_2) \neq 0$, c'est-à-dire lorsque $a \neq 1$, le système \mathcal{S}_2 admet une unique solution. Lorsque $\det(\mathcal{S}_2) = 0$, c'est-à-dire lorsque $a = 1$, le système \mathcal{S}_2 admet aucune ou une infinité de solution(s).

13. Résoudre \mathcal{S}_2 lorsque $a = 1$.

Correction.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \end{array} \right)$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \text{ et } L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2$$

Donc

$$(\mathcal{S}_2) \iff \begin{cases} \boxed{x} = 1 + 2y - 3z \\ \boxed{y} = z \\ z = \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Conclusion : (\mathcal{S}_2) admet une infinité de solutions dans le cas $a = 1$. Son ensemble de solutions est $\{(1 - \alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 4. LINÉARISATION D'EXPRESSIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = 8 \sin^4(x).$$

14. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin^4(x) = \frac{1}{8} \cos(4x) - \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{3}{8}.$$

Correction. On a

$$\begin{aligned} \sin^4(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^4 \\ &= \frac{1}{16} (e^{4ix} - 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} - 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}) \\ &= \frac{1}{16} (e^{4ix} + e^{-4ix} - 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6) \\ &= \frac{1}{16} (2\cos(4x) - 8\cos(2x) + 6) \\ &= \frac{1}{8} \cos(4x) - \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

15. En déduire l'expression d'une primitive $F(x)$ de la fonction $f(x)$.

Correction. Une primitive de $f(x) = \cos(4x) - 4\cos(2x) + 3$ est

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{\sin(4x)}{4} - 4 \frac{\sin(2x)}{2} + 3x \\ &= \frac{\sin(4x)}{4} - 2\sin(2x) + 3x. \end{aligned}$$

Exercice 5. SOMMES ET NOMBRES COMPLEXES.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Pour tout k entier tel que $1 \leq k \leq n-1$, on note

$$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

On introduit les sommes complexes suivantes :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} z_k \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=1}^{n-1} kz_k.$$

16. Calculer S_2 , S_3 , T_2 et T_3 .

Correction. On a

$$S_2 = \sum_{k=1}^1 z_k = z_1 = e^{i\frac{2\pi}{2}} = e^{i\pi} = -1$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^2 z_k = z_1 + z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}} = -1$$

$$T_2 = \sum_{k=1}^1 kz_k = z_1 = -1$$

$$T_3 = \sum_{k=1}^2 kz_k = z_1 + 2z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} + 2e^{i\frac{4\pi}{3}} = -1 + e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

17. Montrer que $S_n = -1$.

Indication : On rappelle que pour $N \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $\sum_{k=0}^N q^k = \frac{q^{N+1} - 1}{q - 1}$.

Correction. On a

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n-1} z_k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(e^{i\frac{2\pi}{n}} \right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{2\pi}{n}} \right)^k - 1 \\ &= \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} - 1 \quad \text{avec } \omega = e^{i\frac{2\pi}{n}} \neq 1 \\ &= -1 \quad \text{car } \omega^n = e^{i2\pi} = 1. \end{aligned}$$

18. En déduire les valeurs exactes de $\sum_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ et $\sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$.

Correction. On a $\sum_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \operatorname{Re}(S_n) = -1$ et $\sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \operatorname{Im}(S_n) = 0$.

19. Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $q \neq 1$. Avec un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=0}^{n-1} kq^k = \frac{q - nq^n + (n-1)q^{n+1}}{(q-1)^2}.$$

On note $H(n)$ la propriété $\sum_{k=0}^{n-1} kq^k = \frac{q - nq^n + (n-1)q^{n+1}}{(q-1)^2}$.

Initialisation : Pour $n = 1$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} kq^k = \sum_{k=0}^0 kq^k = 0 \text{ et } \frac{q - nq^n + (n-1)q^{n+1}}{(q-1)^2} = \frac{q - q}{(q-1)^2} = 0. \text{ Donc } H(1) \text{ est vraie.}$$

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $H(n)$ vraie. Montrons

$$H(n+1) : \sum_{k=0}^n kq^k = \frac{q - (n+1)q^{n+1} + nq^{n+2}}{(q-1)^2}. \text{ On a}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n kq^k &= \sum_{k=0}^{n-1} kq^k + nq^n \\ &= \frac{q - nq^n + (n-1)q^{n+1}}{(q-1)^2} + nq^n && \text{d'après } H(n) \\ &= \frac{q - nq^n + (n-1)q^{n+1} + nq^n(q-1)^2}{(q-1)^2} \\ &= \frac{q - nq^n + (n-1)q^{n+1} + nq^{n+2} - 2nq^{n+1} + nq^n}{(q-1)^2} \\ &= \frac{q + (n-1-2n)q^{n+1} + nq^{n+2}}{(q-1)^2} \\ &= \frac{q - (n+1)q^{n+1} + nq^{n+2}}{(q-1)^2} \end{aligned}$$

donc $H(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=0}^{n-1} kq^k = \frac{q - nq^n + (n-1)q^{n+1}}{(q-1)^2}.$$

20. En déduire que

$$T_n = \frac{n}{e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1}.$$

Correction. On a

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^{n-1} kz_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} kz_k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k\omega^k && \text{avec } \omega = e^{i\frac{2\pi}{n}} \\ &= \frac{\omega - n\omega^n + (n-1)\omega^{n+1}}{(\omega-1)^2} && \text{car } \omega \neq 1 \quad (Q19) \\ &= \frac{\omega - n\omega^n + (n-1)\omega^n \times \omega}{(\omega-1)^2} \\ &= \frac{\omega - n + (n-1)\omega}{(\omega-1)^2} && \text{car } \omega^n = 1 \\ &= \frac{n\omega - n}{(\omega-1)^2} \\ &= \frac{n(\omega-1)}{(\omega-1)^2} \\ &= \frac{n}{\omega-1}. \end{aligned}$$

Conclusion : $T_n = \frac{n}{e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1}$.

21. Vérifier cette expression dans les cas $n = 2$ et $n = 3$.

$$\text{Correction. Pour } n = 2, \frac{n}{e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1} = \frac{2}{e^{i\pi} - 1} = \frac{2}{-2} = -1 = T_2 \quad (Q16)$$

$$\text{Pour } n = 3, \frac{n}{e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1} = \frac{3}{e^{\frac{2i\pi}{3}} - 1} = \frac{3}{-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{6}{(-3 + \sqrt{3}i)} =$$

$$\frac{6(-3 - \sqrt{3}i)}{(-3)^2 + \sqrt{3}^2} = \frac{6(-3 - \sqrt{3}i)}{12} = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = T_3 \text{ (Q16).}$$

22. (Bonus) Montrer que, pour tout réel θ ,

$$e^{i\theta} - 1 = e^{i\frac{\theta}{2}} \times 2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2e^{i\frac{\theta+\pi}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Correction. On a

$$\begin{aligned} \boxed{e^{i\theta} - 1} &= e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}} \right) \\ &= e^{i\frac{\theta}{2}} \times 2i \times \left(\frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2i} \right) \\ &= \boxed{e^{i\frac{\theta}{2}} \times 2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} && \text{(formule d'Euler)} \\ &= e^{i\frac{\theta}{2}} \times 2e^{i\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &= \boxed{2e^{i\frac{\theta+\pi}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \end{aligned}$$

23. (Bonus) En déduire les valeurs exactes de

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n-1} k \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Correction. On a

$$T_n = \frac{n}{e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1} \tag{Q20}$$

$$= \frac{n}{2e^{i\left(\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2}\right)} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} \tag{Q22}$$

$$= e^{-i\left(\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2}\right)} \frac{n}{2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$= \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2}\right)}}{2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} n$$

$$= \left(\cos\left(\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2}\right) \right) \frac{n}{2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$= \left(-\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) - i \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \right) \frac{n}{2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$= -\frac{n}{2} - \frac{n}{2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)} i$$

$$\text{et } \sum_{k=1}^{n-1} k \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \text{Re}(T_n) = -\frac{n}{2} \text{ et } \sum_{k=1}^{n-1} k \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \text{Im}(T_n) = -\frac{n}{2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$