

DEVOIR SURVEILLÉ N°4

Mathématiques

CALCULATRICE INTERDITE

Il sera tenu compte dans la notation de la copie :

1. De la qualité de la rédaction :

justification des affirmations, introduction des variables utilisées, utilisation à bon escient des symboles \implies , \iff , $=$...

2. De la présentation :

résultats encadrés, calculs bien présentés, écriture aérée et lisible...

Exercice 1 : Racines cinquièmes de l'unité

On pose $u = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ (une racine cinquième de l'unité) et on pose

$$S = u + u^4 \quad \text{et} \quad T = u^2 + u^3.$$

1. Justifier que S est un réel strictement positif.
2. Calculer $S + T$ et ST .
3. En déduire les valeurs de S et de T .

Exercice 2 : Racines septièmes de l'unité

4. Expliciter \mathbb{U}_7 .

5. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \neq \pi[2\pi]$, on a

$$\frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} = i \tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

6. Résoudre

$$(1 + z)^7 = (1 - z)^7 \quad (E)$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Indication : On effectuera le changement de variables $\omega = \frac{1+z}{1-z}$ après avoir justifié sa bonne définition. On utilisera Q5 pour exprimer l'ensemble des solutions.