Devoir surveillé n°4

Mathématiques

CALCULATRICE INTERDITE

Il sera tenu compte dans la notation de la copie :

1. **De la qualité de la rédaction** :
   justification des affirmations, introduction des variables utilisées, utilisation à bon escient des symboles $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, $=$ ...
2. **De la présentation** :
   résultats encadrés, calculs bien présentés, écriture aérée et lisible...

Exercice 1 : Racines cinquièmes de l'unité

On pose $u = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}}$ (une racine cinquième de l'unité) et on pose

$$S = u + u^4 \quad \text{et} \quad T = u^2 + u^3.$$

1. Justifier que S est un réel strictement positif.
   Correction. On a $S = u + u^4 = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{2\pi}{5}} + \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{8\pi}{5}} = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{2\pi}{5}} + \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\frac{2\pi}{5}} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ car $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$.

2. Calculer $S + T$ et ST.
   Correction. On a

$$\begin{aligned} S + T &= u + u^2 + u^3 + u^4 \\ &= 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 - 1 \\ &= \frac{u^5 - 1}{u - 1} - 1 && \text{car } u \neq 1, \\ &= -1 && \text{car } u^5 = \mathrm{e}^{\mathbf{i}2\pi} = 1, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} ST &= \left(u + u^4\right)\left(u^2 + u^3\right) \\ &= u^3 + u^4 + u^6 + u^7 \\ &= u^3 + u^4 + u + u^2 && \text{car } u^5 = 1, \\ &= -1. \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{S + T = -1 \text{ et } ST = -1.}$

3. En déduire les valeurs de S et de T.

   Correction. On a

$$\begin{cases} S+T=-1 \\ ST=-1 \end{cases} \iff S \text{ et } T \text{ sont les racines de } z^2+z-1=0$$
$$\iff (S,T)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$
$$\text{ou } (S,T)=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),$$

   or $S>0$, donc $\boxed{S=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } T=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.}$

   Remarque : Au passage, on a démontré que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Exercice 2 : Racines septièmes de l'unité

4. Expliciter $\mathbb{U}_7$.

   Correction. $\boxed{\mathbb{U}_7=\left\{e^{\mathbf{i}\frac{2k\pi}{7}} \,\middle|\, k\in[\![-3;3]\!]\right\}.}$

5. Montrer que pour tout $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $\theta\neq\pi\,[2\pi]$, on a

$$\frac{e^{\mathbf{i}\theta}-1}{e^{\mathbf{i}\theta}+1}=\mathbf{i}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

   Correction. Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $\theta\neq\pi\,[2\pi]$, on a $\frac{e^{\mathbf{i}\theta}-1}{e^{\mathbf{i}\theta}+1}=\frac{\cancel{e^{\mathbf{i}\theta/2}}\left(e^{\mathbf{i}\theta/2}-e^{-\mathbf{i}\theta/2}\right)}{\cancel{e^{\mathbf{i}\theta/2}}\left(e^{\mathbf{i}\theta/2}+e^{-\mathbf{i}\theta/2}\right)}=\frac{\cancel{2}\mathbf{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cancel{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}=\mathbf{i}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

6. Résoudre

$$(1+z)^7=(1-z)^7 \quad (E)$$

   d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

   Indication : On effectuera le changement de variables $\omega=\frac{1+z}{1-z}$ après avoir justifié sa bonne définition. On utilisera Q5 pour exprimer l'ensemble des solutions.

   Correction. 1 n'est pas solution de (E). Soit $z\neq 1$,

$$\begin{aligned}
(E) &\iff \frac{(1+z)^7}{(1-z)^7}=1 && \text{car } z\neq 1\\
&\iff \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^7=1 \\
&\iff \omega^7=1 && \text{avec } \omega=\frac{1+z}{1-z}\\
&\iff \omega=e^{\mathbf{i}\frac{2k\pi}{7}} \quad \text{avec } k\in[\![-3;3]\!], \\
&\iff \frac{1+z}{1-z}=e^{\mathbf{i}\frac{2k\pi}{7}} \quad \text{avec } k\in[\![-3;3]\!], && \text{car } \omega=\frac{1+z}{1-z}\\
&\iff z=\frac{e^{\mathbf{i}\frac{2k\pi}{7}}-1}{e^{\mathbf{i}\frac{2k\pi}{7}}+1} \quad \text{avec } k\in[\![-3;3]\!], \\
&\iff z=\mathbf{i}\tan\left(\frac{k\pi}{7}\right) \quad \text{avec } k\in[\![-3;3]\!], \quad \text{d'après Q5 } \left(\frac{2k\pi}{7}\neq\pi\,[2\pi]\right).
\end{aligned}$$

   Conclusion : L'ensemble des solutions de (E) est

$$\left\{\mathbf{i}\tan\left(\frac{k\pi}{7}\right) \,\middle|\, k\in[\![-3;3]\!]\right\},$$

   c'est-à-dire

$$\left\{0,\pm\mathbf{i}\tan\left(\frac{\pi}{7}\right),\pm\mathbf{i}\tan\left(\frac{2\pi}{7}\right),\pm\mathbf{i}\tan\left(\frac{3\pi}{7}\right)\right\}.$$