Nom :
Prénom :

Lycée Louis Vincent - TSI1
Mercredi 14 janvier 2026

Devoir surveillé n°5

Mathématiques

CALCULATRICE AUTORISÉE

Il sera tenu compte dans la notation de la copie :

1. **De la qualité de la rédaction** :
   justification des affirmations, introduction des variables utilisées, utilisation à bon escient des symboles $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, $=$ ...
2. **De la présentation** :
   résultats encadrés, calculs bien présentés, écriture aérée et lisible...

Exercice 1. Équations différentielles

Partie A.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$\left(1+x^2\right) y' + 2xy = 1 + 3x^2 \quad (E).$$

2. En déduire l'unique solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \left(1+x^2\right) y' + 2xy = 1 + 3x^2 \quad \text{sur } \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Partie B.

On considère l'équation différentielle

$$(E1) \ : \ y' + y = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \quad \text{sur } \mathbb{R}^{+\star}.$$

3. Déterminer (sans calcul) une solution particulière de l'équation $(E1)$.
4. Résoudre $(E1)$.

On considère l'équation différentielle

$$(E2) \ : \ y'' + 5y' + 6y = \frac{x-1}{x^2 \mathrm{e}^{2x}} \quad \text{sur } \mathbb{R}^{+\star}.$$

5. On note (H_2) l'équation homogène associée à (E_2). Résoudre (H_2).

Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$, deux fois dérivable. On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = f(x)\mathrm{e}^{2x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+\star}.$$

6. Exprimer $g'(x)$ et $g''(x)$ en fonction de $f(x)$, $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$.
7. Montrer que :
   $g'(x)$ est solution de $(E1)$ si et seulement si $f(x)$ est solution de $(E2)$.
8. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $(E2)$.

Exercice 2. Géométrie élémentaire du plan

Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé. On considère les points :

$$A(-2,3), \quad B(4,1) \quad \text{et} \quad C(2,7).$$

9. Justifier que le triangle ABC est isocèle.
10. Calculer $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$.
11. En déduire l'aire du triangle ABC.
12. Déterminer un vecteur directeur de la droite (BC).
13. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BC).
14. Déterminer une représentation cartésienne de la droite (BC).
15. Déterminer la distance du point A à la droite (BC), notée $\mathrm{d}\left(A,(BC)\right)$, en commençant par rappeler la formule du cours utilisée.
16. Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant la question 9.

On considère les droites

$$\mathscr{H}_A : \quad x - 3y + 11 = 0, \quad \mathscr{M}_{[BC]} : \quad x - 3y + 9 = 0 \quad \text{et}$$

$$\mathscr{L}_A : \quad \begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 3 + t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Dans le triangle ABC, $\mathscr{H}_A$ est la hauteur issue du sommet A, $\mathscr{M}_{[BC]}$ est la médiatrice du segment $[BC]$ et $\mathscr{L}_A$ est la médiane issue du sommet A.

17. Déterminer une représentation cartésienne de la droite $\mathscr{H}_B$, hauteur issue du sommet B.
18. En déduire, sans calcul, une représentation cartésienne de la droite $\mathscr{M}_{[AC]}$, médiatrice du segment $[AC]$.
19. Déterminer les coordonnées du point H, orthocentre du triangle ABC.
20. Déterminer les coordonnées du point Ω, centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
21. Déterminer les coordonnées du point G, centre de gravité du triangle ABC.
22. Montrer que les points H, Ω et G sont alignés. Comment nomme-t-on la droite (HG) ?
23. Déterminer une équation de $\mathscr{C}$, cercle circonscrit au triangle ABC.

On note $\mathscr{D}$ la droite d'équation $x + 3y - 17 = 0$.

24. Quelle est la nature de $\mathscr{C} \cap \mathscr{D}$?
25. Déterminer une équation cartésienne des tangentes au cercle $\mathscr{C}$ qui sont parallèles à $\mathscr{D}$.