

DEVOIR SURVEILLÉ N°5

Mathématiques

Exercice 1. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Partie A.

1. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle

$$(1+x^2)y' + 2xy = 1 + 3x^2 \quad (E).$$

Correction. $(E) \iff y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{1+3x^2}{1+x^2}$ sur \mathbb{R} .

• Solutions de $(H) : y' + \frac{2x}{1+x^2}y = 0$.

Ici $a(x) = \frac{2x}{1+x^2}$. On pose $A(x) = \ln(|1+x^2|) = \ln(1+x^2)$.

$$y_H(x) = Ce^{-A(x)} = C \frac{1}{e^{A(x)}} = C \times \frac{1}{1+x^2}$$

• Solution particulière de $(E) : y_P(x) = \frac{C(x)}{1+x^2}$.

$$y_P \text{ est solution de } (E) \iff (1+x^2)y'_P(x) + 2xy_P(x) = 1 + 3x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\iff (1+x^2) \left[\frac{C'(x) \times (1+x^2) - C(x) \times 2x}{(1+x^2)^2} \right] + 2x \frac{C(x)}{1+x^2} = 1 + 3x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\iff C'(x) = 1 + 3x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$C(x) = x + x^3$ convient et $y_P(x) = \frac{x+x^3}{1+x^2} = x$ est une solution de (E)

• Solutions de $(E) : y(x) = y_P(x) + y_H(x) = x + \frac{C}{1+x^2}$.

Conclusion : L'ensemble des solutions de (E) est

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x + \frac{C}{1+x^2}, \quad C \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

2. En déduire l'unique solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} (1+x^2)y' + 2xy = 1 + 3x^2 & \text{sur } \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Correction. On note $f(x)$ l'unique solution de ce problème de Cauchy. La fonction $f(x)$ est solution de (E) et, d'après le

résultat précédent, $f(x) = x + \frac{C}{1+x^2}$ avec $C \in \mathbb{R}$. De plus $f(0) = 1$, et donc $C = 1$.
Conclusion : L'unique solution de ce problème de Cauchy est la fonction définie par

$$f(x) = x + \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Partie B.

On considère l'équation différentielle

$$(E1) : y' + y = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \quad \text{sur } \mathbb{R}^{+*}.$$

3. Déterminer (sans calculs) une solution particulière de l'équation (E1).

Correction. On constate que $y_P(x) = \frac{1}{x}$ est solution de (E1). En effet, $y'_P(x) + y_P(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

4. Résoudre (E1).

Correction.

• Solutions de (H1) : $y' + y = 0$.

$$y_H(x) = Ce^{-A(x)} = Ce^{-x}$$

• L'ensemble des solutions de (E1) est

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto Ce^{-x} + \frac{1}{x}, \quad C \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

On considère l'équation différentielle

$$(E2) : y'' + 5y' + 6y = \frac{x-1}{x^2e^{2x}} \quad \text{sur } \mathbb{R}^{+*}.$$

5. On note (H2) l'équation homogène associée à (E2). Résoudre (H2).

Correction. Solutions de (H2) : $y'' + 5y' + 6y = 0$.

Ici $P(x) = x^2 + 5x + 6$. Les racines de P sont -3 et -2 et $y_H(x) = Ae^{-3x} + Be^{-2x}$ sur \mathbb{R}^{+*}

Conclusion : L'ensemble des solutions de (H2) est

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto Ae^{-3x} + Be^{-2x}, \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}.$$

Soit f une fonction réelle définie sur \mathbb{R}^{+*} , deux fois dérivable. On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = f(x)e^{2x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}.$$

6. Exprimer $g'(x)$ et $g''(x)$ en fonction de $f(x)$, $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

Correction. Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)e^{2x} + f(x) \times 2e^{2x} \\ &= (f'(x) + 2f(x))e^{2x} \\ g''(x) &= (f''(x) + 2f'(x))e^{2x} + (f'(x) + 2f(x)) \times 2e^{2x} \\ &= (f''(x) + 4f'(x) + 4f(x))e^{2x}. \end{aligned}$$

7. Montrer que :

$g'(x)$ est solution de (E1) si et seulement si $f(x)$ est solution de (E2).

$$\begin{aligned}
 g'(x) \text{ est solution de (E1)} &\iff g''(x) + g'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} && \forall x \in \mathbb{R}^{++} \\
 &\iff (f''(x) + 4f'(x) + 4f(x))e^{2x} + (f'(x) + 2f(x))e^{2x} = \frac{-1+x}{x^2} && \forall x \in \mathbb{R}^{++} \\
 &\iff f''(x) + 5f'(x) + 6f(x) = \frac{x-1}{x^2e^{2x}} && \forall x \in \mathbb{R}^{++} \\
 &\iff f(x) \text{ est solution de (E2)}.
 \end{aligned}$$

8. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E2).

$$\begin{aligned}
 f(x) \text{ est solution de (E2)} &\iff g'(x) \text{ est solution de (E1)} \\
 &\iff \exists C \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = Ce^{-x} + \frac{1}{x} && \forall x \in \mathbb{R}^{++} \\
 &\iff \exists(C, D) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x) = -Ce^{-x} + \ln(|x|) + D && \forall x \in \mathbb{R}^{++} \\
 &\iff \exists(C, D) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x) = (-Ce^{-x} + \ln(|x|) + D)e^{-2x} && \forall x \in \mathbb{R}^{++} \\
 &\iff \exists(C, D) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x) = -Ce^{-3x} + \ln(x)e^{-2x} + De^{-2x} && \forall x \in \mathbb{R}^{++}
 \end{aligned}$$

Conclusion : L'ensemble des solutions de (E2) est

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}^{++} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto Ae^{-3x} + Be^{-2x} + \ln(x)e^{-2x} \end{array} , \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

Exercice 2. GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE DU PLAN

Soit (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère orthonormé. On considère les points :

$$A(-2, 3), \quad B(4, 1) \quad \text{et} \quad C(2, 7).$$

9. Justifier que le triangle ABC est isocèle.

Correction. On a $\vec{AB}(6, -2)$, $\vec{AC}(4, 4)$ et $\vec{BC}(-2, 6)$.

$$AB = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}, \quad BC = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \quad \text{et} \quad AC = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Le triangle ABC est isocèle en B car $AB = BC$. mais pas équilatéral car $AC \neq AB$.

10. Calculer $[\vec{AB}, \vec{AC}]$.

Correction.

$$[\vec{AB}, \vec{AC}] = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 24 + 8 = 32.$$

11. En déduire l'aire du triangle ABC .

$$\text{Correction. } \mathcal{A}_{ABC} = \frac{|[\vec{AB}, \vec{AC}]|}{2} = 16 \text{ ua.}$$

12. Déterminer un vecteur directeur de la droite (BC) .

Correction. La droite (BC) est dirigée par le vecteur $\vec{u}(-1, 3)$ (colinéaire au vecteur \vec{BC}).

13. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BC) .

Correction. Une représentation paramétrique de la droite (BC) est

$$(BC) : \begin{cases} x = 4 - t \\ y = 1 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

14. Déterminer une représentation cartésienne de la droite (BC) .

Correction. Une équation cartésienne de (BC) est $3x + y - 13 = 0$.

15. Déterminer la distance du point A à la droite (BC) , notée $d(A, (BC))$, en commençant par rappeler la formule du cours utilisée.

Correction.

$$d(A, (BC)) = \frac{|3x_A + y_A - 13|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{16}{\sqrt{10}} = \frac{8\sqrt{10}}{5} \text{ u.}$$

16. Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant la question 9.

Correction. On note A' le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) . On sait que $d(A, (BC)) = AA'$. De plus

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{BC \times AA'}{2}, \quad \text{donc } d(A, (BC)) = \frac{2\mathcal{A}_{ABC}}{BC} = \frac{32}{2\sqrt{10}} = \frac{16}{\sqrt{10}} = \frac{8\sqrt{10}}{5} \text{ u.}$$

On considère les droites

$$\mathcal{H}_A : x - 3y + 11 = 0, \quad \mathcal{M}_{[BC]} : x - 3y + 9 = 0 \quad \text{et}$$

$$\mathcal{L}_A : \begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 3 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dans le triangle ABC , \mathcal{H}_A est la hauteur issue du sommet A , $\mathcal{M}_{[BC]}$ est la médiatrice du segment $[BC]$ et \mathcal{L}_A est la médiane issue du sommet A .

17. Déterminer une représentation cartésienne de la droite \mathcal{H}_B , hauteur issue du sommet B .

Correction. Description de \mathcal{H}_B : $B(4, 1)$ un point et $\overrightarrow{AC}(4, 4)$ un vecteur normal. On fixe $\vec{n}(1, 1)$.

Une équation cartésienne de \mathcal{H}_B est $x + y - 5 = 0$.

18. En déduire, sans calcul, une représentation cartésienne de la droite $\mathcal{M}_{[AC]}$, médiatrice du segment $[AC]$.

Correction. Le triangle ABC étant isocèle en B , les droites \mathcal{H}_B et $\mathcal{M}_{[AC]}$ sont confondues.

Une équation cartésienne de $\mathcal{M}_{[AC]}$ est donc $x + y - 5 = 0$.

19. Déterminer les coordonnées du point H , orthocentre du triangle ABC .

Correction. Par définition $H = \mathcal{H}_A \cap \mathcal{H}_B$. Donc
$$\begin{cases} x_H - 3y_H = -11 \\ x_H + y_H = 5 \end{cases}, \text{ donc } \begin{cases} x_H = 1 \\ y_H = 4 \end{cases}.$$

Conclusion : Les coordonnées de H sont $(1, 4)$.

20. Déterminer les coordonnées du point Ω , centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

Correction. Par définition $\Omega = \mathcal{M}_{[BC]} \cap \mathcal{M}_{[AC]}$. Donc
$$\begin{cases} x_\Omega - 3y_\Omega = -9 \\ x_\Omega + y_\Omega = 5 \end{cases}, \text{ donc } \begin{cases} x_\Omega = \frac{3}{2} \\ y_\Omega = \frac{7}{2} \end{cases}.$$

Conclusion : Les coordonnées de Ω sont $\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

21. Déterminer les coordonnées du point G , centre de gravité du triangle ABC .

Correction. On sait que $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{4}{3}$ et que $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{11}{3}$.

Conclusion : Les coordonnées de G sont $\left(\frac{4}{3}, \frac{11}{3}\right)$.

22. Montrer que les points H , Ω et G sont alignés. Comment nomme-t-on la droite (HG) ?

Correction. On a $\overrightarrow{H\Omega}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{HG}\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. Les vecteurs $\overrightarrow{H\Omega}$ et \overrightarrow{HG} sont colinéaires (en effet $\overrightarrow{HG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{H\Omega}$) et les points H , Ω et G sont donc alignés. La droite (HG) est appelée droite d'Euler.

23. Déterminer une équation de \mathcal{C} , cercle circonscrit au triangle ABC .

Correction. \mathcal{C} est le cercle de centre Ω et de rayon $r = \Omega A$. On a $r = \Omega A = \sqrt{\left(-2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(3 - \frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$.

Conclusion : Une équation de \mathcal{C} est $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$.

On note \mathcal{D} la droite d'équation $x + 3y - 17 = 0$.

24. Quelle est la nature de $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$?

Correction. $d(\Omega, \mathcal{D}) = \frac{|x_\Omega + 3y_\Omega - 17|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}} < r$.

Conclusion : $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ est une paire de points.

25. Déterminer une équation cartésienne des tangentes au cercle \mathcal{C} qui sont parallèles à \mathcal{D} .

Correction : On note T une droite parallèle à \mathcal{D} . Une équation cartésienne de T est $x + 3y + c = 0$ avec c à déterminer.

$$\begin{aligned} T \text{ est tangente à } \mathcal{C} &\iff d(\Omega, T) = r \\ &\iff \frac{|x_\Omega + 3y_\Omega + c|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \\ &\iff |c + 12| = 5\sqrt{5} \\ &\iff c + 12 = 5\sqrt{5} \text{ ou } c + 12 = -5\sqrt{5} \\ &\iff c = 5\sqrt{5} - 12 \text{ ou } c = -5\sqrt{5} - 12. \end{aligned}$$

Conclusion : Les tangentes à \mathcal{C} parallèles à \mathcal{D} ont pour équation $x + 3y + 5\sqrt{5} - 12 = 0$ et $x + 3y - 5\sqrt{5} - 12 = 0$.