Nom :
Prénom :

Lycée Louis Vincent - TSI1
Mercredi 02 février 2026

Devoir surveillé n°6

Mathématiques

Calculatrice autorisée

Exercice 1. Autour d'un tétraèdre

Dans l'espace, on considère un tétraèdre $ABCD$ dont les faces ABC, ACD et ABD sont des triangles rectangles et isocèles en A. On désigne par E, F et G les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$. On choisit AB pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\right)$ de l'espace.

Partie A

1. Réaliser une figure.
2. Donner les coordonnées des points A, B, C, D, E, F et G.
3. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

Partie B On désigne par $\mathcal{P}$ le plan qui passe par A et qui est orthogonal à la droite (DF). On note H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (DF).

4. Donner une représentation paramétrique de la droite (DF).
5. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.
6. Calculer les coordonnées du point H.
7. Montrer que l'angle $\widehat{EHG}$ est un angle droit.

Partie C Soit $t \in \mathbb{R}$. On désigne par M un point de la droite (DF) tel que

$$\overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DF}.$$

On note α la mesure en degrés de l'angle géométrique $\widehat{EMG}$. Le but de cette partie est de déterminer la position du point M pour que α soit maximale, ainsi qu'une valeur approchée à 10^{-1} près de $\alpha_{\max}$.

8. Montrer que $ME^2 = \dfrac{3}{2}t^2 - \dfrac{5}{2}t + \dfrac{5}{4}$.
9. Montrer que le triangle MEG est isocèle en M. En déduire que

$$ME \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

10. Justifier que α est maximale si et seulement si $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ est maximal. En déduire que α est maximale si et seulement si ME^2 est minimal.
11. Conclure.

Exercice 2. Intersection sphère/plan

On munit l'espace d'un repère orthonormé direct $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

Soient $A(2,0,0)$, $B(0,-3,0)$ et $C(0,0,1)$ trois points de l'espace. On note $\mathcal{S}$ la sphère passant par les points par O, A, B et C. On note $\Omega(a,b,c)$ le centre de cette sphère et r son rayon.

12. Donner une équation de $\mathcal{S}$.
13. Déterminer les coordonnées de Ω et le rayon r de la sphère $\mathcal{S}$.
14. Donner l'équation du plan $\mathcal{P}$ passant par les points A, B et C.
15. En déduire le rayon du cercle $\mathcal{C}$ passant par les points A, B et C.