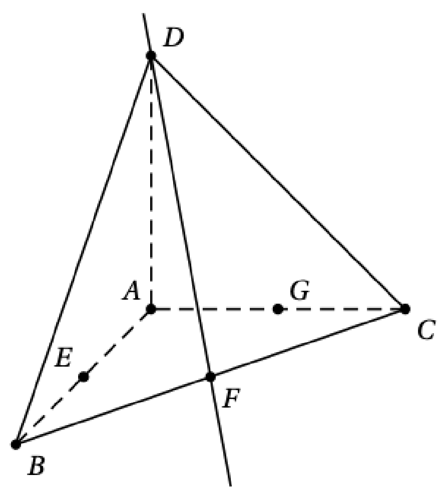
Nom :
Prénom :

Devoir surveillé n°6 - Correction

Mathématiques

Exercice 1. Autour d'un tétraèdre



Dans l'espace, on considère un tétraèdre $ABCD$ dont les faces ABC, ACD et ABD sont des triangles rectangles et isocèles en A. On désigne par E, F et G les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$. On choisit AB pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ de l'espace.

Partie A

1. Réaliser une figure.
2. Donner les coordonnées des points A, B, C, D, E, F et G.
   Correction. $A(0,0,0)$ $B(1,0,0)$ $C(0,1,0)$ $D(0,0,1)$ $E\left(\frac{1}{2},0,0\right)$ $F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$ et $G\left(0,\frac{1}{2},0\right)$.
3. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.
   Correction. Le volume du tétraèdre $ABCD$ est égal à $\frac{\text{Aire}_{ABC}\times\text{hauteur}}{3} = \dfrac{\frac{AB\times AC}{2}\times AD}{3}$, soit $\dfrac{1}{6}$ unité de volume.

Partie B On désigne par $\mathcal{P}$ le plan qui passe par A et qui est orthogonal à la droite (DF). On note H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (DF).

4. Donner une représentation paramétrique de la droite (DF).
   Le vecteur $\overrightarrow{DF}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right)$ est un vecteur directeur de la droite (DF). On pose $\overrightarrow{u}(1,1,-2)$. Une représentation paramétrique de (DF) est
   $$(DF) : \begin{cases} x = t \\ y = t \qquad\qquad (t\in\mathbb{R}) \\ z = 1-2t \end{cases}$$
5. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.
   $\mathcal{P}\perp(DF)$ donc $\mathcal{P} : x+y-2z+d=0$ avec d à déterminer. Comme $A\in\mathcal{P}$, d=0. Finalement une équation de $\mathcal{P}$ est $x+y-2z=0$.
6. Calculer les coordonnées du point H.
   $H\in(DF)$ donc $x_H=t$, $y_H=t$ et $z_H=1-2t$. avec t à déterminer. De plus

Nom :
Prénom :

$H \in \mathcal{P}$ donc $x_H + y_H - 2z_H = 0$, soit $6t - 2 = 0$, soit $t = \frac{1}{3}$.
Finalement $H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

7. Montrer que l'angle $\widehat{EHG}$ est un angle droit.

$$\overrightarrow{HE} \cdot \overrightarrow{HG} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/6 \\ -1/3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{18} - \frac{1}{18} + \frac{1}{9} = 0, \text{ donc } \overrightarrow{HE} \perp \overrightarrow{HG}.$$

Conclusion : L'angle $\widehat{EHG}$ est un angle droit.

Partie C Soit $t \in \mathbb{R}$. On désigne par M un point de la droite (DF) tel que

$$\overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DF}.$$

On note α la mesure en degrés de l'angle géométrique $\widehat{EMG}$. Le but de cette partie est de déterminer la position du point M pour que α soit maximale, ainsi qu'une valeur approchée à 10^{-1} près de $\alpha_{\max}$.

8. Montrer que $ME^2 = \dfrac{3}{2}t^2 - \dfrac{5}{2}t + \dfrac{5}{4}$.

Par définition, $M = D \oplus t\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} \frac{t}{2} \\ \frac{t}{2} \\ 1-t \end{pmatrix}$. On a donc $\overrightarrow{ME} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{t}{2} \\ -\frac{t}{2} \\ t-1 \end{pmatrix}$

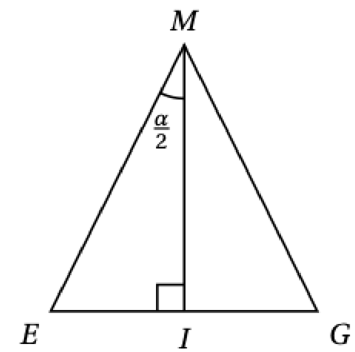
et

$$ME^2 = \|\overrightarrow{ME}\|^2 = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{2}\right)^2 + \left(-\frac{t}{2}\right)^2 + (t-1)^2}^2 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}.$$

9. Montrer que le triangle MEG est isocèle en M. En déduire que

$$ME \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Correction. On montre que $MG^2 = ME^2$ donc $MG = ME$ et le triangle MEG est isocèle en M. Dans le triangle EIM rectangle en I, on a $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{EI}{ME}$, donc $ME \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = EI = \dfrac{EG}{2} = \dfrac{\sqrt{(-1/2)^2 + (1/2)^2 + 0^2}}{2} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.



10. Justifier que α est maximale si et seulement si $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ est maximal. En déduire que α est maximale si et seulement si ME^2 est minimal.

Correction. On a $\alpha \in [0, \pi]$ et donc $\frac{\alpha}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Comme la fonction sin est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on en déduit que si α est maximale, alors $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ est maximale (et réciproquement). Ainsi

$$\begin{aligned} \alpha \text{ est maximale} &\iff \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{ est maximale} \\ &\iff \frac{1}{2\sqrt{2}ME} \text{ est maximale} \\ &\iff ME \text{ est minimale} \\ &\iff ME^2 \text{ est minimale.} \end{aligned}$$

Conclusion : α est maximale si et seulement si ME^2 est minimal.

11. Conclure.

Correction. On étudie la fonction $f(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}$ sur $\mathbb{R}$ (signe de $f'(t)$ et tableau de variations). Cette fonction atteint un minimum en $t = \dfrac{5}{6}$. Lorsque $t = \dfrac{5}{6}$, les coordonnées de M sont $\left(\dfrac{5}{12}, \dfrac{5}{12}, \dfrac{1}{6}\right)$,

$ME = \sqrt{\frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}} = \sqrt{\dfrac{5}{24}}$,

$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}ME} = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$ et $\alpha = 2\arcsin\left(\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right) \simeq 101,5°$.

Exercice 2. Intersection sphère/plan

Nom :
Prénom :

On munit l'espace d'un repère orthonormé direct $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

Soient $A(2,0,0)$, $B(0,-3,0)$ et $C(0,0,1)$ trois points de l'espace. On note $\mathcal{S}$ la sphère passant par les points par O, A, B et C. On note $\Omega(a,b,c)$ le centre de cette sphère et r son rayon.

12. Donner une équation de $\mathcal{S}$.
    Correction. $\mathcal{S} : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$.

13. Déterminer les coordonnées de Ω et le rayon r de la sphère $\mathcal{S}$.
    Correction. Les points par O, A, B et C appartiennent à la sphère $\mathcal{S}$ donc

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=r^2 & (1) \\ (2-a)^2+b^2+c^2=r^2 & (2) \\ a^2+(-3-b)^2+c^2=r^2 & (3) \\ a^2+b^2+(1-c)^2=r^2 & (4) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=r^2 & (1) \\ 4-4a=0 & (2)-(1) \\ 9+6b=0 & (3)-(1) \\ 1-2c=0 & (4)-(1) \end{cases}$$

d'où $a=1$, $b=-\dfrac{3}{2}$, $c=\dfrac{1}{2}$ et $r=\sqrt{\dfrac{7}{2}}$.

14. Donner l'équation du plan $\mathcal{P}$ passant par les points A, B et C.
    Correction. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs générateurs de $\mathcal{P}$. On pose $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$.
    Une équation de $\mathcal{P}$ est $-3x+2y-6z+6=0$.

15. En déduire le rayon du cercle $\mathcal{C}$ passant par les points A, B et C.
    Correction. Le cercle $\mathcal{C}$ est l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la sphère $\mathcal{S}$. D'après le cours, le rayon ρ du cercle $\mathcal{C}$ vérifie

$$\begin{aligned} \rho^2 &= r^2 - \mathrm{d}\left(\Omega, \mathcal{P}\right)^2 \\ &= \frac{7}{2} - \left(\frac{|-3a+2b-6c+6|}{\sqrt{(-3)^2+2^2+(-6)^2}}\right)^2 \\ &= \frac{325}{98}. \end{aligned}$$

Ainsi le rayon du cercle $\mathcal{C}$ est $\sqrt{\dfrac{325}{98}}$.